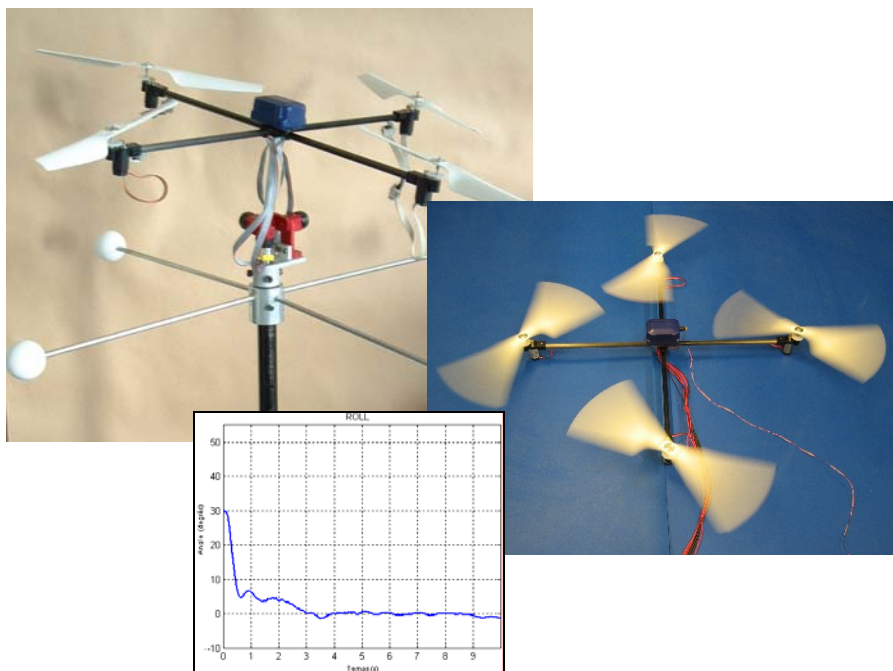


Projet de diplôme

Synthèse et Implémentation d'un Contrôleur pour Micro Hélicoptère à 4 Rotors



Professeur: Roland Siegwart
Assistants: Samir Bouabdallah
Mohamed Bouri
Philippe Müllhaupt

André Noth
Microtechnique
Février 2004

Synthesis and Implementation of a Controller on a 4 Propeller Micro-Helicopter

Assistants: Samir Bouabdallah
Mohamed Bouri
Philippe Müllhaupt
Professor: Roland Siegwart

Recent progresses in sensor technology, data processing and integrated actuators have made small-scale flying robots possible.

The goal of this project is to implement a controller on OS4, a micro-helicopter developed at the Swiss institute of technology (EPFL).



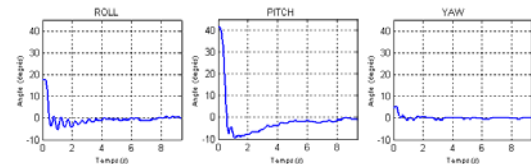
Picture and frame system of OS4

After a **modeling** of the dynamic system, control methods will be realized using a **classic** and also a **modern approach**. First, they will be simulated and then applied on the real helicopter.

Modeling was realized using Lagrange-Euler approach based on energy concepts. It highlights torques due to propellers thrust and drag, but also gyroscopic effects. A model of the propeller groups (motor-reductor-propeller) was developed, simulated and validated as well. The total system is **non-linear, under-actuated and multiple input, multiple output (MIMO)**.

A **Proportional Integral Derivative (PID)** regulator was dimensioned and then simulated on Simulink software where it gave good results with the first type of motor (Faulhaber), which speed was closed-loop controlled. With the second type (Portescap) used only in open loop, oscillations appeared, due to a slower dynamic. However, the advantage of Portescap motors was a more important power.

During the implementation on the real model, some limitations have been encountered : drift of sensor returned angles, especially on yaw, due to magnetic disturbances, and saturation of Faulhaber motors. Using Portescap motors, more powerful, a stationary flight during several seconds has been realised.

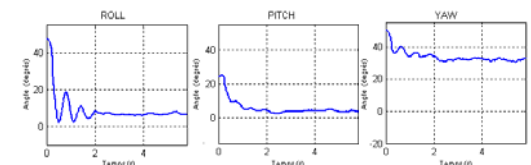


Orientation control with PID and speed controlled motors

In a second step, we used **Optimal Control** approach, more precisely a **Linear Quadratic Regulator (LQR)**. This approach aims at minimizing, on the trajectory, a criteria J representing system energy and variation between desired and actual state, balanced with weight matrix Q and R.

The model was therefore linearised, using **adaptive matrix**, without motor dynamic. The input were directly forces and torques due to thrust and drag.

Simulations showed good results without motors dynamics, but once those include, performances decreased. On the real system, LQ regulator stabilises the system but permanent errors occur.



Orientation control with LQ regulator

In conclusion, **Optimal Control** is powerful when the linearised model is exact, which was not the case here. Moreover, there isn't any rule for the choice of Q and R which is difficult because it determines the complete system behaviour.

Implementation on the OS4 was realized on a 450Mhz computer using **Linux** to be as near as possible from the next goal : the control of OS4 executed on an onboard card.

Table des matières

1	INTRODUCTION	3
2	ETUDE DE LA DYNAMIQUE DU MICRO-HÉLIOPTÈRE	4
2.1	HYPOTHÈSES DU MODÈLE	4
2.2	DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE SELON LAGRANGE-EULER	4
2.2.1	FIXATION DES COORDONNÉES	5
2.2.2	DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE	6
2.2.3	ENERGIE CINÉTIQUE	8
2.2.4	ENERGIE CINÉTIQUE ET POTENTIELLE	9
2.2.5	MODÈLE SELON LAGRANGE-EULER AVEC APPROXIMATION DES PETITS ANGLES	13
3	AMÉLIORATION DU SET-UP	14
3.1	EXPLICATION DU PROBLÈME	14
3.2	TESTS	15
3.3	NOUVEAU SET-UP	16
4	COMPARAISON DU MODÈLE ET DU SYSTÈME RÉEL	17
4.1	MODÈLE DYNAMIQUE DES MOTEURS	17
4.1.1	ETUDE DE LA DYNAMIQUE DES MOTEURS	17
4.1.2	LINÉARISATION DE L'ÉQUATION	19
4.1.3	SIMULATION DE LA DYNAMIQUE DANS MATLAB	19
4.1.4	TESTS ET COMPARAISON AVEC LA SIMULATION	20
4.1.5	COMPARAISON DES PERFORMANCES DES DEUX MOTEURS	21
4.2	MODÈLE DYNAMIQUE DE L'HÉLIOPTÈRE	23
4.2.1	RÉSULTATS DES TESTS	23
4.3	INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS	24
5	SYNTHÈSE ET SIMULATION D'UN CONTRÔLEUR AVEC UNE APPROCHE DITE CLASSIQUE (PID)	26
5.1	SYNTHÈSE DU CONTRÔLEUR PID	26
5.2	SIMULATION ET DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES	28
5.2.1	RÉGULATEUR PD SUR MODÈLE DE L'HÉLIOPTÈRE DÉCOUPLÉ	28
5.2.2	RÉGULATEUR PD SUR MODÈLE DE L'HÉLIOPTÈRE COMPLET	30
5.2.3	CONCLUSIONS INTERMÉDIAIRES	31
5.3	TESTS SUR LE MODÈLE RÉEL	31
5.3.1	PROBLÈMES RENCONTRÉS	36
5.4	CONCLUSION ET CRITIQUE DE L'APPROCHE CLASSIQUE	37

6	<u>SYNTHÈSE ET SIMULATION D'UN CONTRÔLEUR AVEC UNE APPROCHE DITE MODERNE</u>	38
6.1	THÉORIE DU CONTRÔLE OPTIMAL	38
6.1.1	POSITION GÉNÉRALE DU PROBLÈME	38
6.1.2	PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN	38
6.1.3	COMMANDE LINÉAIRE QUADRATIQUE	39
6.2	RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE RICCATI [4]	40
6.3	REMARQUES	40
6.4	CONTRÔLE OPTIMAL AVEC LINÉARISATION PRÈS DE L'ÉQUILIBRE	41
6.5	CONTRÔLE OPTIMAL ADAPTATIF	42
6.5.1	MÉTHODE DE PEARSON	43
6.5.2	MÉTHODE DE SAGE – EISENBERG	44
6.6	TESTS SUR LE MODÈLE RÉEL	47
6.7	CONCLUSIONS ET CRITIQUE DE LA MÉTHODE MODERNE	48
7	<u>IMPLÉMENTATION DU CONTRÔLE SOUS LINUX</u>	50
7.1	LIBRAIRIES INSTALLÉES	50
7.1.1	LIBRAIRIES DU CAPTEUR MT9-B	50
7.1.2	LIBRAIRIES DE CALCUL SCIENTIFIQUE CBLAS ET CLAPACK	50
7.2	SCHÉMA FONCTIONNEL	51
7.3	RAPIDITÉ D'EXÉCUTION	51
8	<u>CONCLUSIONS ET AMÉLIORATIONS PROPOSÉES</u>	53
9	<u>REMERCIEMENTS</u>	55
10	<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	56
11	<u>ANNEXES</u>	57
11.1	DÉTAILS DE CALCUL	57
11.1.1	ROULIS	58
11.1.2	TANGAGE	59
11.1.3	LACET	62
11.2	GRANDEURS DES DIFFÉRENTS EFFETS DYNAMIQUES DU MODÈLE	65
11.3	CODE MATLAB DE LA MÉTHODE DE PEARSON	67
11.4	CODE MATLAB DE LA MÉTHODE DE SAGE-EISENBERG	69

1 Introduction

Le développement de plates-formes robotiques volantes connaît un essor croissant depuis quelques années en raison de la miniaturisation toujours plus poussée des capteurs et des actionneurs, mais surtout grâce à la possibilité d'embarquer des cartes de commande toujours plus performantes et rapides capables d'exécuter la masse de calcul considérable nécessaire au contrôle de celles-là.

Au Laboratoire des Systèmes Autonomes (ASL), de nombreux projets ont déjà étudié des hélicoptères existants sur le marché. Un modèle propre à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) est à l'étude : *l'Omnidirectional Stationary Flying Outstretched Robot (OS4)*.

Le but de ce présent projet est de développer un modèle dynamique de l'OS4, puis de faire la synthèse et la simulation d'un régulateur selon une approche classique mais également par la suite selon une approche dite moderne. Il s'agit ensuite d'implémenter et de tester ces deux régulateurs sur le banc de test.

2 Etude de la dynamique du micro-hélicoptère

L'hélicoptère OS4 possède une armature, constituée de 2 barres en fibre de carbone, aux extrémités desquelles sont fixés 4 moteurs actionnant 4 rotors d'axe vertical. Son envergure est de 75 centimètres pour une masse de 230 grammes. Placé au centre, un capteur Xsens MT9-B fournit diverses données dont les orientations et les vitesses angulaires. Il résulte de la rotation de chacun des moteurs une force verticale, **la portance**, ainsi qu'un couple d'antirotation dû au frottement, **la traînée**, sur le plan horizontal.

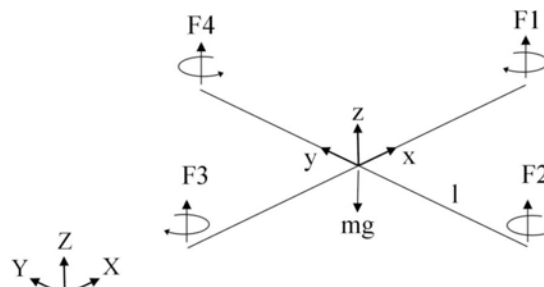


Fig. 2.1 Système de repère sur l'OS4

Ainsi, l'angle de tangage variera si les vitesses des moteurs 1 et 3, donc les forces de portance, sont inégales. Il en est de même pour l'angle de roulis, mais avec les moteurs 2 et 4.

Les moteurs 1 et 3 tournent dans le sens opposé aux moteurs 2 et 4 ce qui permet, d'une part, d'obtenir à vitesses égales un couple d'antirotation nul afin que l'hélicoptère ne tourne pas et, d'autre part, de modifier l'angle de lacet en rendant le couple d'antirotation total non nul.

2.1 Hypothèses du modèle

En réalité, un grand nombre d'effets physiques ont lieu sur l'OS4. Malgré tout, il est nécessaire dans un premier temps d'effectuer des hypothèses afin d'éliminer ceux de plus faible importance.

- La structure en fibre de carbone est supposée rigide.
- L'hélicoptère possède une structure parfaitement symétrique ce qui induit que la matrice d'inertie sera supposée diagonale.
- La portance et la traînée de chaque moteur sont proportionnelles au carré de la vitesse, ce qui est une approximation très proche du comportement aérodynamique.
- On ne tient pas compte de la vitesse des rotors par rapport au sol (vol stationnaire ou à faible vitesse).

2.2 Développement du modèle selon Lagrange-Euler

Un modèle a déjà été développé selon la méthode de Newton-Euler qui utilise les concepts de forces et de couples. Il s'agit maintenant de développer un modèle suivant une approche Lagrangienne, c'est-à-dire selon les énergies potentielles et cinétiques :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.1)$$

$$L = T - V \quad (2.2)$$

avec q_i : coordonnées généralisées

Γ_i : forces généralisées données par les forces non conservatives

T : énergie cinétique totale

V : énergie potentielle totale

Les deux approches sont évidemment équivalentes physiquement, mais les énergies n'étant pas des quantités vectorielles, elles sont conceptuellement plus faciles à utiliser dans une vaste gamme de problèmes.

2.2.1 Fixation des coordonnées

Un point dans l'espace peut être défini par des coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. En général le système choisi est le système cartésien permettant de désigner une rotation par les angles d'Euler.

Il faut toutefois faire attention aux confusions dans certaines littératures où les angles d'Euler sont souvent confondus avec d'autres définitions d'angles comme ceux de Cardan. Les angles d'Euler décrivent les *rotations successives* suivantes :

- Rotation de ψ autour de \vec{Z} : $\vec{X} \Rightarrow \vec{u}$ (**angle de précession**)
- Rotation de θ autour de \vec{u} : $\vec{Z} \Rightarrow \vec{z}$ (**angle de nutation**)
- Rotation de ϕ autour de \vec{z} : $\vec{u} \Rightarrow \vec{x}$ (**angle de rotation propre**)

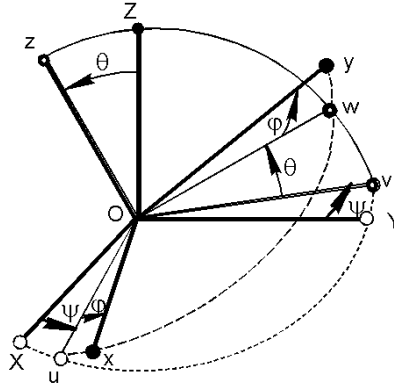


Fig. 2.2 Rotation selon la précession, la nutation et la rotation propre

Le capteur d'orientation MT9-B, comme décrit dans les datasheet, n'utilise pas les angles d'Euler mais les angles de Cardan qui décrivent les *rotations successives* suivantes :

- Rotation de ϕ autour de \vec{x} : (**angle de roulis** avec $-\pi < \phi < \pi$)
- Rotation de θ autour de \vec{y} : (**angle de tangage** avec $-\pi/2 < \theta < \pi/2$)
- Rotation de ψ autour de \vec{z} : (**angle de lacet** avec $-\pi < \psi < \pi$)

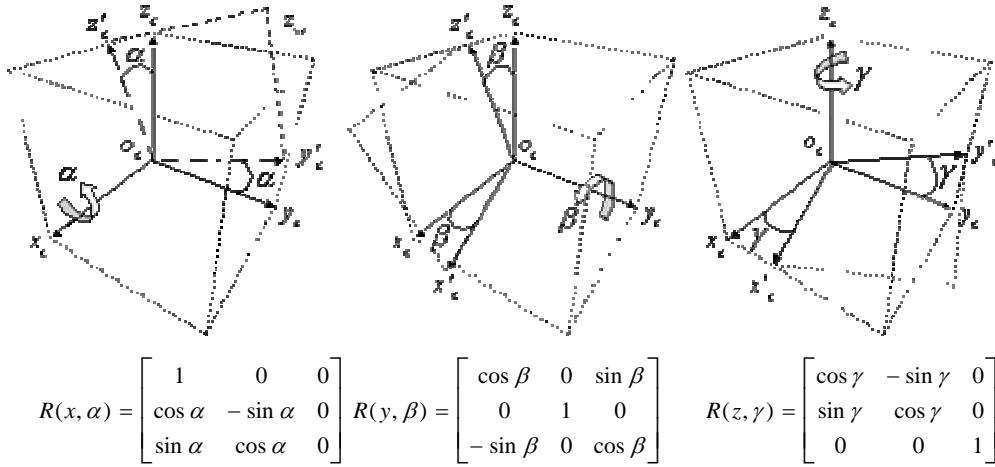


Fig. 2.3 Rotation selon le roulis, le tangage et le lacet

Dans le cas présent, on va donc utiliser les angles de Cardan afin d'être conforme aux données que fournira le capteur. Ainsi, en multipliant les trois matrices, on obtient la matrice de rotation totale:

$$R(\phi, \theta, \psi) = R(z, \psi) \cdot R(y, \theta) \cdot R(x, \phi)$$

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2.2.2 Développement du modèle

Soit B une base orthonormée $[\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}]$ constituant un repère fixe. Soit également S une base orthonormée $[\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s]$ constituant un repère du solide initialement confondu avec B.

Si le solide subit 3 rotations successives selon les angles de Cardan, on peut alors exprimer tout point (x,y,z) du solide dans le repère B par :

$$r_{x,y,z}(x, y, z) = R(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$r_x(x, y, z) = (\cos \psi \cos \theta)x + (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi)y + (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi)z$$

$$r_y(x, y, z) = (\sin \psi \cos \theta)x + (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi)y + (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \psi)z$$

$$r_z(x, y, z) = (-\sin \theta)x + (\cos \theta \sin \phi)y + (\cos \theta \cos \phi)z$$

Par dérivation, les vitesses correspondantes sont :

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) &= (-\sin \theta \cos \psi \dot{\theta} - \cos \theta \sin \psi \dot{\psi})x \\ &\quad + (-\cos \psi \cos \phi \dot{\psi} + \sin \psi \sin \phi \dot{\phi} - \sin \psi \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} + \cos \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\phi} + \cos \psi \sin \phi \cos \theta \dot{\theta})y \\ &\quad + (\cos \psi \sin \phi \dot{\psi} + \sin \psi \cos \phi \dot{\phi} - \sin \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} - \cos \psi \sin \phi \sin \theta \dot{\phi} + \cos \psi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta})z \\ v_y(x, y, z) &= (-\sin \theta \sin \psi \dot{\theta} + \cos \theta \cos \psi \dot{\psi})x \\ &\quad + (-\sin \psi \cos \phi \dot{\psi} - \cos \psi \sin \phi \dot{\phi} + \cos \psi \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} + \sin \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\phi} + \sin \psi \sin \phi \cos \theta \dot{\theta})y \\ &\quad + (\sin \psi \sin \phi \dot{\psi} - \cos \psi \cos \phi \dot{\phi} + \cos \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} - \sin \psi \sin \phi \sin \theta \dot{\phi} + \sin \psi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta})z \\ v_z(x, y, z) &= (-\cos \theta \dot{\theta})x \\ &\quad + (\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta})y \\ &\quad + (-\sin \phi \cos \theta \dot{\phi} - \cos \phi \sin \theta \dot{\theta})z \end{aligned}$$

Que l'on peut réécrire :

$$v_x(x, y, z) = v_{x_x}x + v_{x_y}y + v_{x_z}z = \begin{pmatrix} v_{x_x} & v_{x_y} & v_{x_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$v_y(x, y, z) = v_{y_x}x + v_{y_y}y + v_{y_z}z = \begin{pmatrix} v_{y_x} & v_{y_y} & v_{y_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$v_z(x, y, z) = v_{z_x}x + v_{z_y}y + v_{z_z}z = \begin{pmatrix} v_{z_x} & v_{z_y} & v_{z_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le carré de la norme de la vitesse du point P est donné par :

$$v^2(x, y, z) = v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)$$

$$v^2(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_{x_x} & v_{x_y} & v_{x_z} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_{x_x} \\ v_{x_y} \\ v_{x_z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{y_x} & v_{y_y} & v_{y_z} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_{y_x} \\ v_{y_y} \\ v_{y_z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{z_x} & v_{z_y} & v_{z_z} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_{z_x} \\ v_{z_y} \\ v_{z_z} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
v^2(x, y, z) &= x^2 \cdot (v_{x_x}^2 + v_{y_x}^2 + v_{z_x}^2) \\
&\quad + y^2 \cdot (v_{x_y}^2 + v_{y_y}^2 + v_{z_y}^2) \\
&\quad + z^2 \cdot (v_{x_z}^2 + v_{y_z}^2 + v_{z_z}^2) \\
&\quad + 2xy \cdot (v_{x_x} \cdot v_{x_y} + v_{y_x} \cdot v_{y_y} + v_{z_x} \cdot v_{z_y}) \\
&\quad + 2xz \cdot (v_{x_x} \cdot v_{x_z} + v_{y_x} \cdot v_{y_z} + v_{z_x} \cdot v_{z_z}) \\
&\quad + 2yz \cdot (v_{x_y} \cdot v_{x_z} + v_{y_y} \cdot v_{y_z} + v_{z_y} \cdot v_{z_z}) \\
v^2(x, y, z) &= x^2 \cdot (\cos^2 \theta \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) \\
&\quad + y^2 \cdot (\dot{\psi}^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta) + \dot{\psi}(-2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} - 2 \dot{\phi} \sin \theta) + \sin^2 \phi \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\
&\quad + z^2 \cdot (\dot{\psi}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta) + \dot{\psi}(2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} - 2 \dot{\phi} \sin \theta) + \cos^2 \phi \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\
&\quad + 2xy(\dot{\psi}^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(\cos \phi \sin \theta \dot{\theta} - \sin \phi \cos \theta \dot{\phi}) - \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\
&\quad + 2xz(\dot{\psi}^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(-\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\
&\quad + 2yz(-\dot{\psi}^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + \dot{\psi}(\sin^2 \phi \cos \theta \dot{\theta} - \cos^2 \phi \cos \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2)
\end{aligned}$$

En s'efforçant de faire apparaître les moments d'inertie, on arrive après quelques étapes à :

$$\begin{aligned}
v^2(x, y, z) &= (y^2 + z^2) \left(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \dot{\phi} \dot{\psi} + \dot{\phi}^2 \right) \\
&\quad + (x^2 + z^2) \left(\dot{\psi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} + \cos^2 \phi \dot{\theta}^2 \right) \\
&\quad + (x^2 + y^2) \left(\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta - 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} + \sin^2 \phi \dot{\theta}^2 \right) \\
&\quad + 2xy(\dot{\psi}^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(\cos \phi \sin \theta \dot{\theta} - \sin \phi \cos \theta \dot{\phi}) - \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\
&\quad + 2xz(\dot{\psi}^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(-\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\
&\quad + 2yz(-\dot{\psi}^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + \dot{\psi}(\sin^2 \phi \cos \theta \dot{\theta} - \cos^2 \phi \cos \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2.3 Energie cinétique

L'énergie cinétique vaut alors :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int y^2 + z^2(R) dm(R) \cdot (\dot{\phi}^2 - \dot{\psi} \dot{\phi} 2 \sin \theta + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int z^2 + x^2(R) dm(R) \cdot (\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + \dot{\theta} \dot{\psi} 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta + \dot{\psi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int x^2 + y^2(R) dm(R) \cdot (\dot{\theta}^2 \sin^2 \phi - \dot{\theta} \dot{\psi} 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta + \dot{\psi}^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\
&\quad + \int xy(R) dm(R) \cdot (\dot{\psi}^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(\cos \phi \sin \theta \dot{\theta} - \sin \phi \cos \theta \dot{\phi}) - \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\
&\quad + \int xz(R) dm(R) \cdot (\dot{\psi}^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(-\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\
&\quad + \int yz(R) dm(R) \cdot (-\dot{\psi}^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + \dot{\psi}(\sin^2 \phi \cos \theta \dot{\theta} - \cos^2 \phi \cos \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

On remarque directement les **moments d'inertie**, éléments diagonaux de la matrice d'inertie, ainsi que les **produits d'inertie**, éléments non diagonaux. En négligeant les petites imperfections ainsi que les câbles des moteurs, on considère, en raison des symétries, que les produits d'inertie sont nuls ; la matrice d'inertie de l'hélicoptère est donc diagonale.

2.2.4 Energie cinétique et potentielle

On a donc pour l'énergie cinétique du système, en factorisant l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} I_{xx} (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta)^2 \\
 & + \frac{1}{2} I_{yy} (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta)^2 \\
 & + \frac{1}{2} I_{zz} (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta)^2
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

On peut également s'en convaincre en exprimant l'énergie du système, dont la matrice d'inertie est diagonale, par :

$$T = \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 \tag{2.7}$$

où les vitesses de rotation $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ dans le repère du solide $\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s$ sont exprimées par rapport aux vitesses de rotations successives $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ dans $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$. On a :

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R(x, \phi)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + (R(y, \theta) \cdot R(x, \phi))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

En effet, la rotation en roulis a lieu lorsque les repères sont encore confondus. Puis, en ce qui concerne le tangage, le vecteur représentant la rotation doit être exprimé dans le repère du solide : il est donc multiplié par $R(x, \phi)^{-1}$. De même, le vecteur représentant la rotation en lacet doit être exprimé dans le repère du solide qui a déjà subi 2 rotations. On arrive ainsi à :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \cdot \dot{\theta} \\ -\sin \phi \cdot \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \theta \cdot \dot{\psi} \\ \sin \phi \cos \theta \cdot \dot{\psi} \\ \cos \phi \cos \theta \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} \cdot \cos \phi + \dot{\psi} \cdot \sin \phi \cos \theta \\ -\dot{\theta} \cdot \sin \phi + \dot{\psi} \cdot \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

ce qui donne exactement la même expression de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} I_{xx} \cdot \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \cdot \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \cdot \omega_z^2 \\
&= \frac{1}{2} I_{xx} \cdot (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \cdot (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \cdot (-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta)^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

L'énergie potentielle est exprimée quant à elle par :

$$\begin{aligned}
V &= g \int (-\sin \theta \cdot x + \sin \phi \cos \theta \cdot y + \cos \phi \cos \theta \cdot z) dm(r) \\
V &= \int x dm(x) \cdot (-g \sin \theta) \\
&\quad + \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \cos \theta) \\
&\quad + \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \cos \theta)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Le Lagrangien vaut :

$$L = T - V$$

Les équations de mouvement sont alors données par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \tau_{\psi} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau_{\phi} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_{\theta}$$

Afin de ne pas alourdir le rapport, tous les calculs ont été mis en annexe. Ils mènent aux résultats suivants :

Pour le roulis

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \ddot{\phi} \cdot I_{xx} \right. \\
&\quad - \ddot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot I_{xx} \\
&\quad - \dot{\psi} \dot{\theta} \cdot \cos \theta (I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz})(2 \cos^2 \phi - 1)) \\
&\quad + \dot{\theta}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad - \dot{\psi}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos^2 \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad + \int y dm(y) \cdot (-g \cos \phi \cos \theta) \\
&\quad \left. + \int z dm(z) \cdot (g \sin \phi \cos \theta) \right|
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Pour le tangage

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = & \ddot{\theta} \cdot (I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi) \\
& + \ddot{\psi} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
& + \dot{\psi}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta (-I_{xx} + I_{yy} \sin^2 \phi + I_{zz} \cos^2 \phi) \\
& + \dot{\theta} \dot{\phi} \cdot \sin 2\phi (I_{zz} - I_{yy}) \\
& + \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot \cos \theta (\cos 2\phi \cdot (I_{yy} - I_{zz}) + I_{xx}) \\
& + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
& - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
& - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Pour le lacet

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = & \ddot{\psi} \cdot (\cos^2 \theta (I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta I_{xx}) \\
& - \ddot{\phi} \cdot \sin \theta I_{xx} \\
& + \ddot{\theta} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\
& + \dot{\theta} \dot{\psi} \cdot \sin 2\theta (I_{xx} - I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi) \\
& - \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot \sin 2\phi \cos^2 \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\
& + \dot{\theta} \dot{\phi} \cdot \cos \theta (I_{xx} + (2 \cos^2 \phi - 1)(I_{yy} - I_{zz})) \\
& - \dot{\theta}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \theta (I_{yy} - I_{zz})
\end{aligned} \tag{2.14}$$

On peut sensiblement simplifier l'écriture de ces équations en exprimant les vitesses et accélérations des angles d'Euler en fonction des vitesses et accélérations instantanées dans le repère du mobile (eq. 2.9). Les calculs en annexe donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = & I_{xx} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \\
& + \int y dm(y) \cdot (-g \cos \phi \cos \theta) \\
& + \int z dm(z) \cdot (+g \sin \phi \cos \theta)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = & -\sin \phi (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy})) \\
& + \cos \phi (\dot{\omega}_y \cdot I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx})) \\
& + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
& - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
& - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= -\sin \theta \cdot (\dot{\omega}_x I_{xx} - \omega_y \omega_z (I_{yy} - I_{zz})) \\
&\quad + \sin \phi \cos \theta \cdot (\dot{\omega}_y I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx})) \\
&\quad + \cos \phi \cos \theta \cdot (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy}))
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Les couples non conservatifs sont :

- les portances des moteurs qui créent, en direction des axes x et y, des couples :

$$\tau_x = bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \quad \tau_y = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)$$

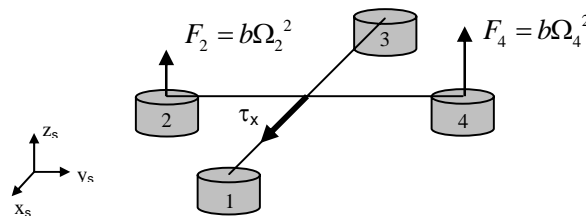


Fig. 2.4 Rotation due à la portance des moteurs réglant le roulis

- les traînées des hélices en supposant que, vue de dessus, les hélices 1 et 3 tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Celles-ci vont donc créer un couple dans le sens des aiguilles d'une montre, vu du dessus :

$$\tau_z = d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)$$

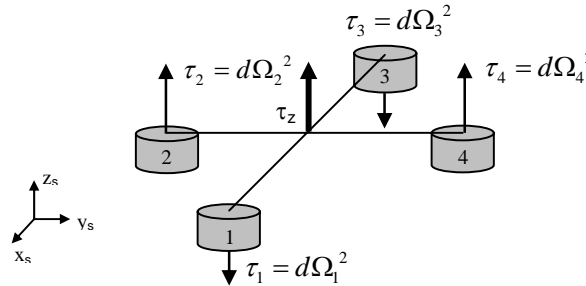


Fig. 2.5 Rotation en lacet due à la traînée des hélices

- les effets gyroscopiques dus aux hélices lors d'une rotation de autour de l'axe x ou y du repère du solide. Lors d'une rotation autour de x, on peut calculer par un simple produit vectoriel, le couple sur l'axe y :

$$\tau_y = I_{rotor} \omega_x (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4)$$

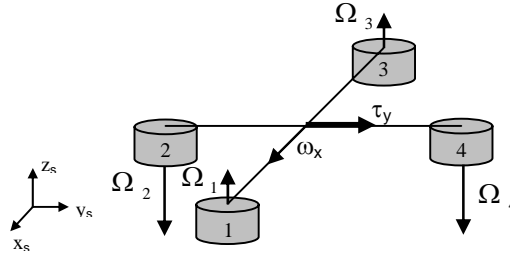


Fig. 2.6 Rotation en tangage due aux effets gyroscopiques des hélices

De la même manière, lors d'une rotation autour de y, on a un couple sur l'axe x

$$\tau_x = I_{rotor} \omega_y (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)$$

En additionnant tous les couples, on a :

$$\tau_x = bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) + I_{rotor} \omega_y (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4) \quad (2.18)$$

$$\tau_y = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + I_{rotor} \omega_x (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4) \quad (2.19)$$

$$\tau_z = d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \quad (2.20)$$

2.2.5 Modèle selon Lagrange-Euler avec approximation des petits angles

En isolant les accélérations et en appliquant l'approximation des petits angles, où les vitesses des angles de Cardan sont identiques aux vitesses angulaires dans le repère du solide, on arrive à :

$$\ddot{\psi} = \frac{d(-\Omega_2^2 - \Omega_4^2 + \Omega_1^2 + \Omega_3^2)}{I_{zz}} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} \dot{\phi} \quad (2.21)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_{rotor} \dot{\theta} (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)}{I_{xx}} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)}{I_{xx}} \quad (2.22)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{I_{rotor} \dot{\phi} (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4)}{I_{yy}} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_{yy}} \quad (2.23)$$

On voit ainsi que l'on tombe exactement sur le modèle développé par la méthode de Newton-Euler.

Afin de se rendre compte de l'importance, durant la régulation, des différents termes des trois équations ci-dessus, on a représenté graphiquement (annexe 2) leurs valeurs durant la simulation du contrôleur PID de la figure 5.5. On se rend compte que les effets gyroscopiques sont importants lorsque l'hélicoptère se trouve loin de la consigne visée, mais qu'une fois celle-ci atteinte, ils deviennent moindres.

3 Amélioration du Set-up

3.1 Explication du problème

Au départ, l'hélicoptère était fixé par un câble, se séparant ensuite en quatre, grâce auquel il était suspendu en son centre.

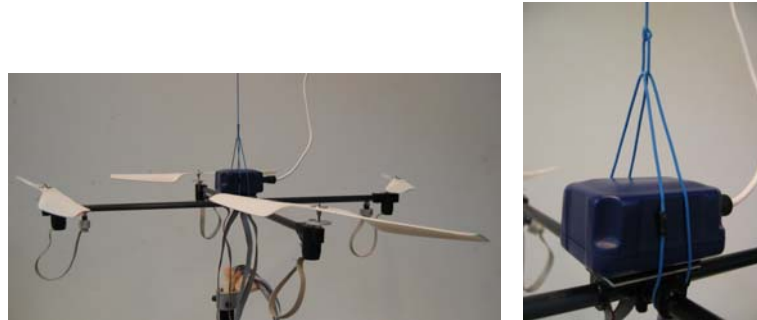


Fig. 3.1 Images du fil soutenant l'hélicoptère

Cette technique de fixation permet de maintenir à une hauteur constante l'OS4, alors que les deux autres translations et les trois orientations sont libres. Malgré tout, elle possède plusieurs inconvénients :

- La disposition des 4 câbles stabilise légèrement le roulis et le tangage de l'hélicoptère. En effet, si l'hélicoptère augmente son roulis, deux des quatre câbles se détendent. Les deux restant tendus exercent alors un couple qui stabilise l'hélicoptère.

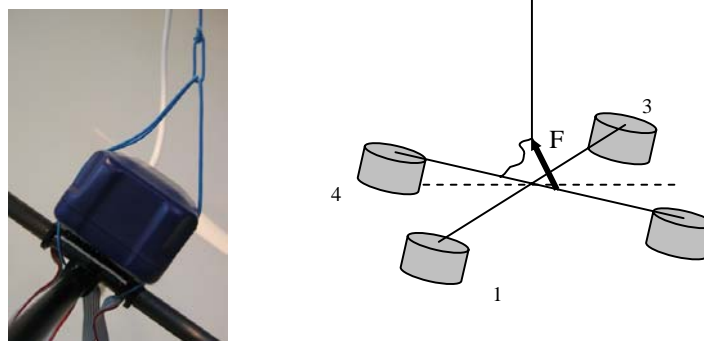


Fig. 3.2 Stabilisation due au câble de fixation

On peut vérifier cet effet par une expérience qui consiste à mesurer l'évolution des angles de l'hélicoptère en partant d'une orientation non plane. C'est ce que l'on a effectué au chapitre suivant.

- Etant donné que les translations en x et en y sont libres, lorsque l'hélicoptère s'éloigne trop de la position où le câble est vertical, il se passe le même effet que décrit plus haut. En effet, deux des quatre câbles se détendent ce qui engendre de la part des deux restants un couple déstabilisant.

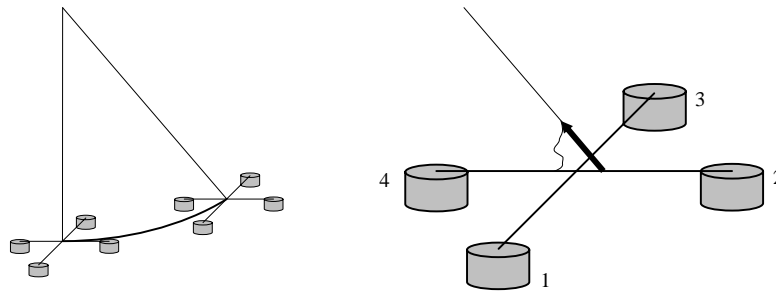


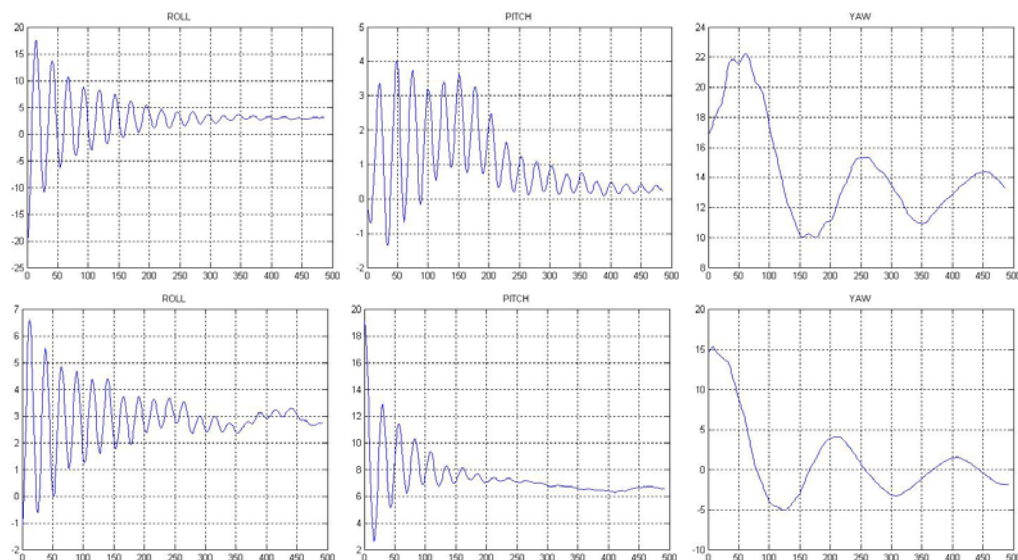
Fig. 3.3 Déstabilisation due au câble de fixation lors d'une dérive en x,y

3.2 Tests

Afin de se rendre compte de l'effet de stabilisation mentionné en 3.1, des tests ont été effectués en mesurant l'orientation de l'avion au fil temps avec des angles initiaux non nuls. Les 3 expériences que l'on a effectuées possédaient les conditions initiales suivantes :

No d'expérience	Conditions initiales		
	Roll	Pitch	Yaw
1	-20°	0°	libre
2	0°	20°	libre
3	-10°	10°	libre

Les mesures de l'orientation au fil du temps sont représentées dans les graphiques suivants :



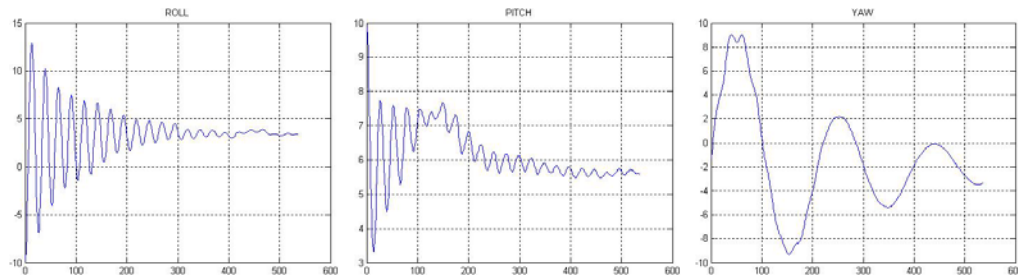


Fig. 3.4 Expérience démontrant le rôle de régulateur du fil

On voit bien de ses expériences que ce système de fixation par fil qui vient se lier à l'armature par quatre points constitue déjà un **régulateur des trois orientations**. Il est donc évident que, même si cet effet est minime, tout contrôle ne verra pas le même système à régler si l'hélicoptère est sur ce set-up ou totalement libre dans les airs.

3.3 Nouveau Set-Up

On a donc cherché à réaliser une fixation permettant réellement une liberté des trois orientations. Pour ce faire, la rotule ou le cardan est l'élément idéal : elle empêche les trois translations mais pas les trois rotations.

Un cardan possédant des encodeurs avait été utilisé précédemment mais, en raison de son encombrement, il était nécessaire de le lier à l'hélicoptère grâce à un tube de quelques centimètres de longueur. L'inconvénient de cette configuration réside dans le fait qu'en partant d'un angle important, l'hélicoptère, une fois arrivé à une orientation horizontale, possède une vitesse qui tend à le faire basculer dans le sens opposé.

Afin d'obtenir un centre de rotation plus proche du centre de gravité de l'hélicoptère et d'avoir le minimum de frottement et d'inertie, on a utilisé une rotule sphérique qui est placée à 25mm du centre de gravité.



Fig. 3.5 Nouveau système de fixation par rotule

Pour des expériences où le centre de gravité est occupé physiquement (capteurs, carte de commande,...), il est également possible d'utiliser des mécanismes qui permettent une rotation autour d'un centre virtuel.

Mis à part le système de fixation, un point gênant se situait au niveau du câble reliant le capteur d'orientations et de vitesses angulaires. En effet, celui-ci est très rigide et exerce ainsi un couple perturbateur permanent qui empêche l'hélicoptère d'atteindre la position désirée. Un câble plus léger et beaucoup moins rigide a été réalisé en utilisant des fils de bobinage.

4 Comparaison du modèle et du système réel

Afin de vérifier que le modèle théorique correspond à la réalité, on a effectué une série de tests. Cette validation permettra d'implémenter des contrôleurs sur le logiciel Simulink qui agiront un système à régler conforme à la réalité. On a procédé ainsi pour le modèle dynamique des moteurs ainsi que pour le modèle dynamique de l'hélicoptère.

4.1 Modèle dynamique des moteurs

Durant ce projet, deux types de moteurs ont été utilisés sur l'hélicoptère. Tout d'abord, des moteurs **Faulhaber 1724 012 SR** possédant un encodeur à capteurs hall, ce qui a permis de les contrôler en vitesse. Puis, vers la fin du projet, ceux-ci ont été changés pour des moteurs **Portescap 16G 88 211E** qui, eux, ne possèdent pas d'encodeur mais sont plus puissants : ceci permet d'obtenir une portance plus élevée. Les caractéristiques principales de ces moteurs sont les suivantes :

	Faulhaber 1724 012 SR	Portescap 16G 88 211E	
Tension nom	12	12	Volt
R de l'induit	16.20	12.5	Ohm
Puissance utile	2.17		Watt
Rendement	80		%
Vitesse à vide	7900	9700	rpm
Courant à vide	0.009	0.010	A
Couple de démarrage	10.5	11.2	mNm
Constante FEM	1.500	1.23	mV/rpm
Constante de couple	14.3	11.7	mNm/A
Constante de courant	0.070	0.085	A/mNm
Pente de la courbe n/m	752		rpm/mNm
Inductance	360	260	micro H
Constante de temps mécanique	8	14	ms
Inertie du rotor	1	1.5	gcm ²

4.1.1 Etude de la dynamique des moteurs

La dynamique d'un moteur à courant continu est régie par les deux équations bien connues :

$$L \frac{di}{dt} = u - Ri - k_e \omega_m \quad (4.1)$$

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = M_{em} - M_{fr} \quad \text{avec} \quad M_{em} = k_m \cdot i \quad (4.2)$$

En ce qui concerne les petits moteurs, on peut considérer que l'inductance L est négligeable. En effet, l'impédance de l'induit vaut $16.2 + j\omega 3.6 \cdot 10^{-4}$ pour les moteurs Faulhaber et $12.5 + j\omega 2.6 \cdot 10^{-4}$ pour les moteurs Portescap.

On réduit donc la première équation à :

$$0 = u - Ri - k_e \omega_m \quad \rightarrow \quad i = \frac{u - k_e \omega_m}{R} \quad (4.3)$$

ce qui donne, en isolant puis introduisant le courant i dans la seconde équation :

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = k_m \cdot \frac{u - k_e \omega_m}{R} - M_{fr} \quad (4.4)$$

En se rappelant que dans les moteurs à courant continu la constante de force électromagnétique est identique à la constante de couple :

$$J \dot{\omega}_m = -\frac{k_m^2}{R} \omega_m - M_{fr} + \frac{k_m}{R} u \quad (4.5)$$

Appliquons maintenant cette équation au cas de l'OS4 : le moment de frottement de l'hélice, appelé également traînée, vaut :

$$M_{fr} = \frac{d \omega_{hélice}^2}{\eta r} \quad (4.6)$$

où d est le coefficient de traînée et η le rendement de la transmission entre le moteur et l'hélice que l'on estime à 90%. Si l'on veut inclure cet élément dans l'équation du moteur, il faut évidemment tenir compte du fait que :

$$\omega_{hélice} = \frac{\omega_m}{r} \quad \Rightarrow \quad M_{fr} = \frac{d}{\eta r^3} \omega_m^2 \quad \text{où } r \text{ est le rapport de réduction de 4} \quad (4.7)$$

De plus, l'inertie de l'hélice vue par le moteur sera diminuée en raison du facteur de réduction, mais augmentée par le rendement de la transmission. Si le rendement est η , cela signifie que la puissance reçue par l'hélice du moteur vaut :

$$J_{hélice} \omega_{hélice}^2 = \eta \cdot J_{hélice \rightarrow m} \omega_m^2 \quad \text{où } J_{hélice \rightarrow m} \text{ désigne l'inertie de l'hélice vue du moteur}$$

$$J_{hélice \rightarrow m} = \frac{J_{hélice}}{\eta r^2} \quad (4.8)$$

On peut donc réécrire l'équation du moteur :

$$\left(\frac{J_{hélice}}{\eta r^2} + J_m \right) \dot{\omega}_m = -\frac{k_m^2}{R} \omega_m - \frac{d}{\eta r^3} \omega_m^2 + \frac{k_m}{R} u \quad (4.9)$$

En nommant J_{tot} l'inertie totale vue du moteur, on a :

$$\dot{\omega}_m = -\frac{k_m^2}{R J_{tot}} \omega_m - \frac{d}{\eta r^3 J_{tot}} \omega_m^2 + \frac{k_m}{R J_{tot}} u \quad (4.10)$$

Ce que l'on peut mettre sous la forme :

$$\dot{\omega}_m = -\frac{1}{\tau} \omega_m - \frac{d}{\eta r^3 J_{tot}} \omega_m^2 + \frac{1}{k_m \tau} u \quad \text{grâce à} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{k_m^2}{R J_{tot}} \quad (4.11)$$

Si l'on calcule la constante de temps du moteur en omettant l'hélice, on arrive à :

$$\tau = \frac{RJ_m}{k_m^2} = \frac{16.2\Omega \cdot 1 \cdot 10^{-7} \text{ Kg m}^2}{(1.43 \cdot 10^{-2} \text{ NmA})^2} = 7.922 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 7.922 \text{ ms}$$

$$\tau = \frac{RJ_m}{k_m^2} = \frac{12.5\Omega \cdot 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ Kg m}^2}{(1.17 \cdot 10^{-2} \text{ NmA})^2} = 1.369 \cdot 10^{-2} \text{ s} = 13.69 \text{ ms}$$

ce qui correspond exactement aux spécifications des fabricants.

4.1.2 Linéarisation de l'équation

Si on linéarise l'équation autour d'une vitesse de fonctionnement ω_0 en utilisant un développement de Taylor du premier ordre :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \quad (4.12)$$

on peut réécrire l'équation sous la forme :

$$\dot{\omega}_m = -A\omega_m + Bu + C \quad (4.13)$$

où A, B et C valent respectivement

$$A = \frac{1}{\tau} + \frac{2d\omega_0}{\eta r^3 J_{tot}}$$

$$B = \frac{1}{k_m \tau}$$

$$C = \frac{d\omega_0^2}{\eta r^3 J_{tot}}$$

4.1.3 Simulation de la dynamique dans Matlab

En boucle ouverte, la tension à appliquer au moteur afin qu'il arrive à une vitesse ω_c vaut :

$$\begin{aligned} \frac{d}{r^3 J_{tot}} \omega_{mc}^2 + \frac{1}{\tau} \omega_{mc} - \frac{1}{k_m \tau} u_c &= 0 \\ \omega_{mc} &= \frac{-\frac{1}{\tau} + \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4 \frac{d}{\eta r^3 J_{tot}} \frac{1}{k_m \tau} u_c}}{2 \frac{d}{\eta r^3 J_{tot}}} = \frac{-\eta r^3 k_m J_{tot} + \sqrt{\eta^2 r^6 J_{tot}^2 k_m^2 + 4 \eta d r^3 k_m \tau J_{tot} u_c}}{2 \tau d k_m} \end{aligned}$$

ce qui donne pour la tension nécessaire :

$$u_c = k_{mc} \frac{\left(2\tau d \omega_{mc} + \eta r^3 J_{tot}\right)^2 - \eta^2 r^6 J_{tot}^2}{4\eta d r^3 \tau J_{tot}} \quad (4.14)$$

Numériquement, on a pour le moteur Faulhaber :

$$J_{tot} = \left(1 \cdot 10^{-7} + \frac{5.14 \cdot 10^{-5}}{0.9 \cdot 4^2} Kg m^2 \right) = 3.669 \cdot 10^{-6} Kg m^2$$

$$\tau = \frac{RJ_{tot}}{k_m^2} = \frac{16.2\Omega \cdot 3.669 \cdot 10^{-6} Kg m^2}{(1.43 \cdot 10^{-2} NmA)^2} = 2.906 \cdot 10^{-1} sec = 290.6 ms$$

$$u_c = \left(4.207 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_{mc} + 1.699 \right)^2 - 2.8881 [V]$$

$$u_c = 0.000018 \cdot \omega_{mc}^2 + 0.014295 \cdot \omega_{mc} + 0.00560 [V]$$

et pour le moteur Portescap :

$$J_{tot} = \left(1.5 \cdot 10^{-7} + \frac{5.14 \cdot 10^{-5}}{0.9 \cdot 4^2} Kg m^2 \right) = 3.719 \cdot 10^{-6} Kg m^2$$

$$\tau = \frac{RJ_{tot}}{k_m^2} = \frac{12.5\Omega \cdot 3.719 \cdot 10^{-6} Kg m^2}{(1.17 \cdot 10^{-2} NmA)^2} = 3.396 \cdot 10^{-1} sec = 339.6 ms$$

$$u_c = \left(4.085 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_{mc} + 1.4318 \right)^2 - 2.05006 [V]$$

$$u_c = 0.0000167 \cdot \omega_{mc}^2 + 0.0117 \cdot \omega_{mc} [V]$$

Dans Matlab, on utilisera, pour le moteur, les équations pré-calculées ci-dessus pour une raison de rapidité, mais également pour le fait qu'en reprenant l'équation symbolique de u telle qu'elle est plus haut, il risque d'y avoir un overflow au numérateur et au dénominateur en raison des très petites dimensions de d et J_{tot} . Il faudrait alors veiller à les factoriser correctement.

4.1.4 Tests et comparaison avec la simulation

Afin de vérifier ce modèle, on a simulé le comportement du moteur Faulhaber sous Simulink pour un saut de vitesse. Puis, on a utilisé le même saut de vitesse comme consigne sur le moteur réel. Dans ce cas, on a effectué le test sur les moteurs Faulhaber en boucle ouverte mais également sur les mêmes moteurs en boucle fermée, donc avec le régulateur que comporte chaque module moteur.

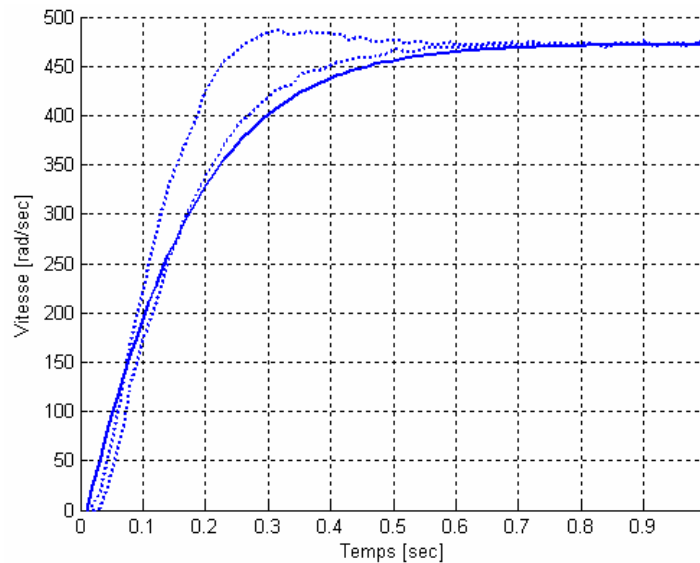


Fig. 4.1 Réponse du moteur à une consigne sous forme de saut de vitesse
(... boucle ouverte et fermée sur modèle réel — simulation Matlab)

Ce graphique montre clairement que la simulation se rapproche assez des tests en boucle ouverte, mais qu'il subsiste tout de même une certaine erreur qui peut avoir plusieurs causes : l'inertie des hélices a été calculée en les considérant comme des parallélépipèdes dont la masse est uniformément répartie ce qui n'est que partiellement vrai. De plus, il ne faut pas oublier que la formule selon laquelle la traînée est proportionnelle au carré de vitesse de l'hélice n'est qu'une approximation, certes très proche, de la réalité. Finalement, on n'a pas tenu compte de la température d'utilisation des moteurs qui augmente sensiblement, puisqu'on les utilise avec une tension maximale de 18V alors que la tension nominale du moteur est de 12V. Ainsi, les moteurs ont certainement perdu de leurs performances étant donné qu'ils ont été utilisés longuement dans des conditions plus difficiles que celles pour lesquelles ils sont prévus.

4.1.5 Comparaison des performances des deux moteurs

Afin de comparer les deux moteurs, on a utilisé un banc de test permettant de mesurer, en fonction de la tension appliquée, la portance des hélices montées sur ceux-ci. Le courant a également été mesuré afin de calculer la puissance consommée. Les moteurs étant commandés par les modules moteurs, la tension appliquée est définie par la valeur d'un registre qui se situe entre 0 et 127 à laquelle correspond linéairement une tension de 0 à 18V. On a donc effectué 26 mesures par saut de 5 bits, comme on peut le voir sur le graphique ci-dessous montrant la portance mesurée en fonction de la tension aux bornes.

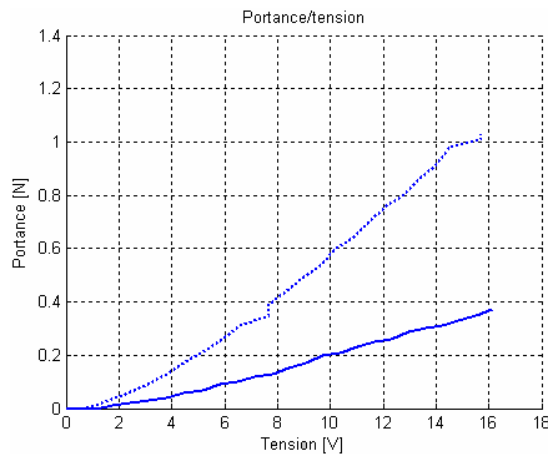


Fig. 4.2 Portance en fonction de la tension
(— moteur Faulhaber moteur Portescap)

On voit bien que le moteur Portescap fournit une portance plus importante que le moteur Faulhaber pour la même tension. Il faut cependant tenir compte du fait que les moteurs Portescap étaient neufs alors que ceux de l'entreprise Faulhaber avaient déjà été utilisés plusieurs fois.

On peut également se demander ce qu'il en est au niveau de la puissance consommée.

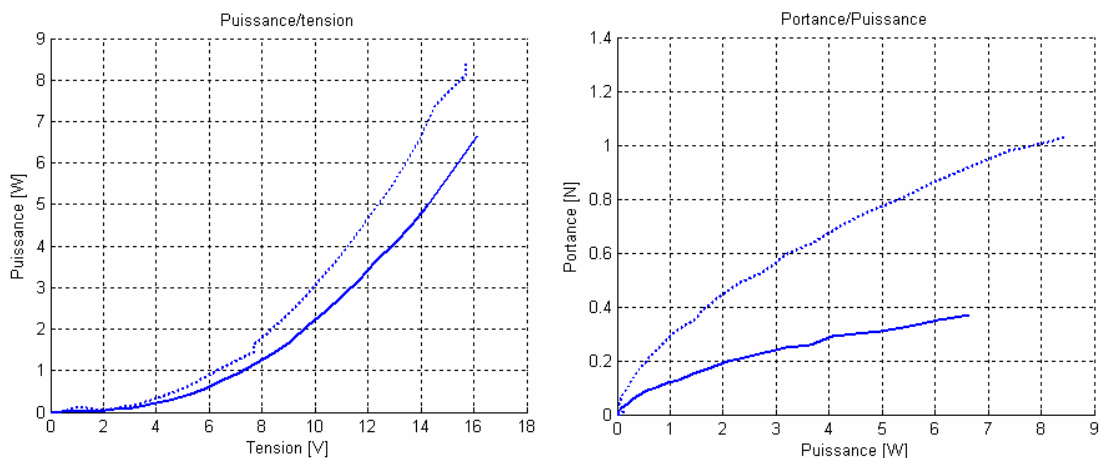


Fig. 4.3 Caractéristiques puissance-tension et portance-puissance
(— moteur Faulhaber moteur Portescap)

Le graphique de gauche démontre qu'à tension égale, le moteur Portescap consomme légèrement plus de puissance (~20%) que le moteur Faulhaber. Cependant, comme on peut le voir sur le graphique de droite, la portance que permet ce moteur justifie son utilisation. En revanche, comme il a été fait mention plus haut, ce moteur ne pourra pas être contrôlé en vitesse en boucle fermée et il possède une constante de temps mécanique plus élevée que celui de l'entreprise Faulhaber (14ms contre 8ms).

4.2 Modèle dynamique de l'hélicoptère

On a également voulu vérifier le modèle dynamique de l'hélicoptère en effectuant une série de tests en boucle ouverte. Pour chaque test, des consignes fixes ont été données aux moteurs puis, depuis une position initiale connue, on a enregistré l'évolution de l'orientation dans le temps. Avec des conditions initiales similaires, on a alors réalisé la même expérience par simulation sous Matlab.

4.2.1 Résultats des tests

Essai 1

Les graphiques ci-dessous représentent les angles de Cardan durant l'essai sur l'hélicoptère réel (traits discontinus) et durant la simulation sur Matlab (traits continus) pour les mêmes conditions initiales et des consignes moteurs :

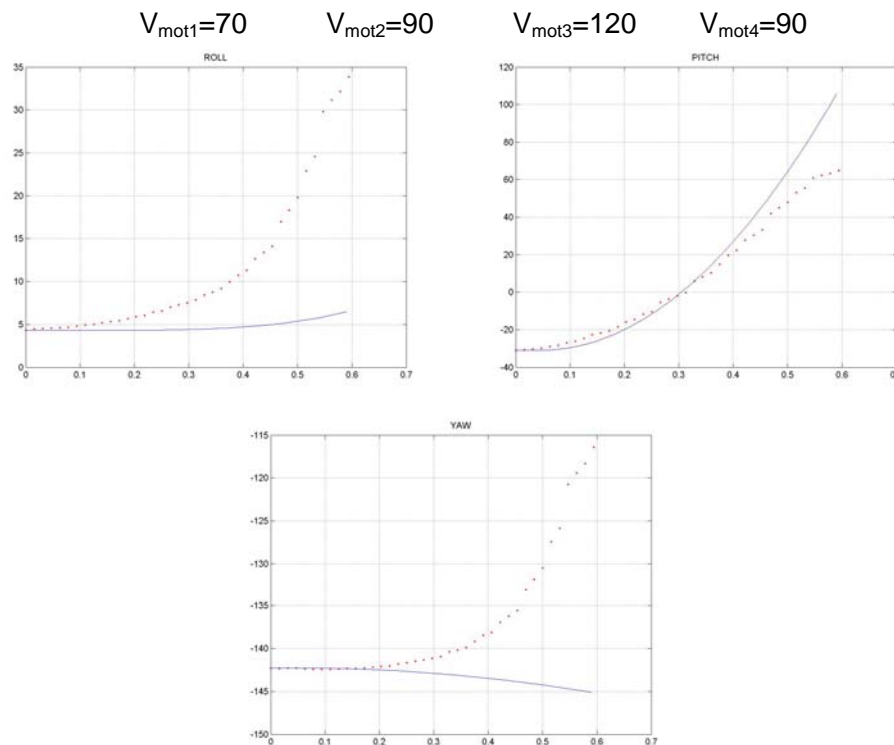


Fig. 4.4 Orientation de l'hélicoptère pour des vitesses constantes des moteurs

On remarque qu'en ce qui concerne le tangage, sur lequel un couple dû à la différence de portance à lieu, la simulation rejoint relativement bien la réalité. En revanche, ce n'est pas le cas pour le roulis et le lacet.

Essai 2

Cette fois-ci, on met les vitesses suivantes :

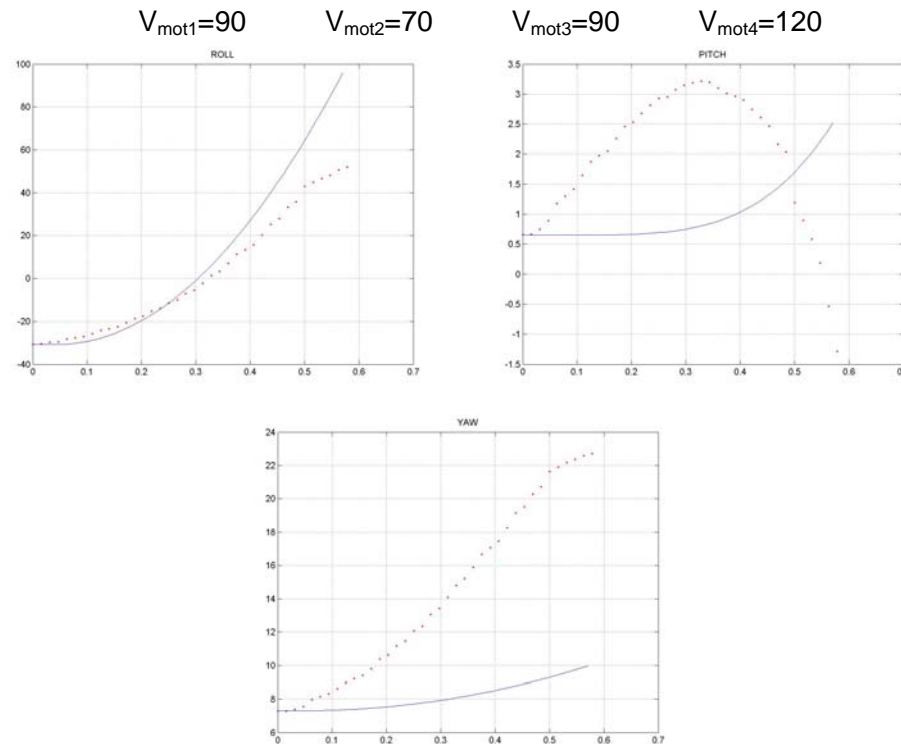


Fig. 4.5 Orientation de l'hélicoptère pour des vitesses constantes des moteurs

Ici encore, on voit que pour l'angle qui subit le moment dû à la différence de portance des moteurs, le roulis, on obtient, par l'expérience, une courbe quelque peu inférieure à la simulation. Par contre, les autres angles ne correspondent pas.

4.3 Interprétation des résultats

Après avoir réalisé une douzaine d'expériences avec diverses commandes moteur en boucle ouverte, on se rend compte qu'il est très difficile de valider correctement le modèle théorique. Les raisons sont triples :

- L'hélicoptère subit de la part du câble relié au capteur d'orientation une force créant un couple perturbateur, certainement bien supérieur aux faibles couples gyroscopiques. Il n'est donc pas possible de les mettre en évidence.
- La rotule n'est pas exempte de frottement
- Le centre de gravité de l'hélicoptère étant distant de son centre de rotation en raison de la méthode de fixation par rotule, il va varier de hauteur durant les changements d'orientations. L'énergie fournie par les moteurs ne sert donc pas uniquement à la rotation mais également à une petite ascension en z .

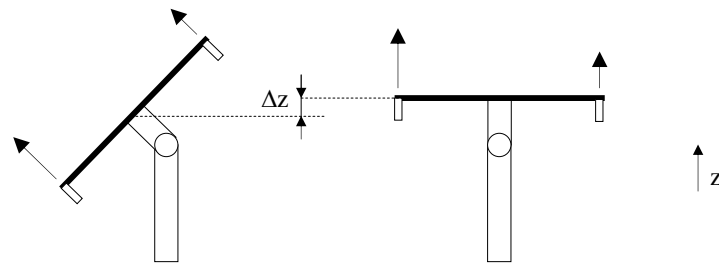


Fig. 4.6 Elévation du centre de gravité lors de la rotation

On voit donc clairement qu'il est très difficile de valider le modèle complet, surtout en ce qui concerne les effets gyroscopiques, puisque cela nécessite d'avoir un centre de rotation confondu avec le centre de gravité, aucune perturbation extérieure et aucun frottement.

Malgré tout, on part sur le principe que le modèle est correct. Ceci sera vérifié par la suite lorsque le régulateur simulé sur ce modèle fournira des résultats similaires à l'implémentation sur le modèle réel.

5 Synthèse et simulation d'un contrôleur avec une approche dite classique (PID)

La première phase de ce projet consiste à faire la synthèse d'un régulateur proportionnel intégral dérivé (PID) afin de voir les performances, mais également les limitations d'une telle méthode de commande par rapport à une méthode plus moderne. Dans un premier temps, seul le contrôle des angles de roulis, de tangage et de lacet est réalisé, ce qui permet une stabilisation horizontale.

5.1 Synthèse du contrôleur PID

On va prendre tout d'abord les équations du modèle concernant les angles de Cardan, en tenant compte uniquement de la portance et de la traînée des moteurs mais en négligeant les effets gyroscopiques.

$$\ddot{\phi} = \frac{l}{I_{xx}} U_2 \text{ avec } U_2 = b(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \quad (5.1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{l}{I_{yy}} U_3 \text{ avec } U_3 = b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \quad (5.2)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}} U_4 \text{ avec } U_4 = d(-\Omega_2^2 - \Omega_4^2 + \Omega_1^2 + \Omega_3^2) \quad (5.3)$$

L'entrée de commande U_1 représente la portance totale de l'hélicoptère :

$$U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

Dans le domaine de Laplace, on a :

$$\phi(s) = \frac{l}{I_{xx}s^2} U_2(s) \quad (5.4)$$

$$\theta(s) = \frac{l}{I_{yy}s^2} U_3(s) \quad (5.5)$$

$$\psi(s) = \frac{1}{I_{zz}s^2} U_4(s) \quad (5.6)$$

Mais les couples dus à la portance des hélices suivent également la dynamique des moteurs selon l'équation linéarisée développée plus haut :

$$\dot{\Omega} = -A\Omega + Bu + C \quad (5.7)$$

d'où l'on tire :

$$\Omega(s) = \frac{B \cdot u(s) + C}{s + A} \quad (5.8)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
U_2(s) &= b(\Omega_2^2(s) - \Omega_4^2(s)) = b \left(\left(\frac{B \cdot u_2(s) + C}{s + A} \right)^2 - \left(\frac{B \cdot u_4(s) + C}{s + A} \right)^2 \right) \\
&= \frac{b}{(s + A)^2} \left((B \cdot u_2(s) + C)^2 - (B \cdot u_4(s) + C)^2 \right) \\
&= \frac{Bb}{(s + A)^2} \left(B(u_2^2(s) - u_4^2(s)) + 2C(u_2(s) - u_4(s)) \right) \\
&= \frac{Bb \cdot (u_2(s) - u_4(s))}{(s + A)^2} \left(B(u_2(s) + u_4(s)) + 2C \right)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Pour les valeurs de A et B, éléments du modèle linéarisé des moteurs autour d'un point de fonctionnement, on prend comme vitesse des moteurs celle qui fournit la portance nécessaire à supporter le poids de l'hélicoptère.

$$b(\Omega^2 + \Omega^2 + \Omega^2 + \Omega^2) = 2.6N \quad \rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{2.6}{4 \cdot 3.13 \cdot 10^{-5}}} = 144.107 \text{ rad / s} \tag{5.10}$$

ce qui donne pour le moteur Faulhaber

$$A = 4.66$$

$$B = 240.55$$

$$C = 88.29$$

Dans l'équation 5.9, on peut négliger le terme $2C$ qui, avec une tension de l'ordre de 15 volts, est quarante fois plus petit que $B(u_2(s) + u_4(s))$. On a alors :

$$U_2(s) = b(\Omega_2^2(s) - \Omega_4^2(s)) = b \left(\frac{B}{s + A} \right)^2 (u_2^2(s) - u_4^2(s)) \tag{5.11}$$

$$U_3(s) = b(\Omega_3^2(s) - \Omega_1^2(s)) = b \left(\frac{B}{s + A} \right)^2 (u_3^2(s) - u_1^2(s)) \tag{5.12}$$

$$U_4(s) = d(-\Omega_2^2(s) - \Omega_4^2(s) + \Omega_1^2(s) + \Omega_3^2(s)) = d \left(\frac{B}{s + A} \right)^2 (-u_2^2(s) - u_4^2(s) + u_1^2(s) + u_3^2(s))$$

Ce qui donne pour la dynamique totale, en remplaçant dans les équations 5.1 à 5.3:

$$\phi(s) = \frac{B^2 bl}{s^2 (s + A)^2 I_{xx}} (u_2^2(s) - u_4^2(s)) \tag{5.13}$$

$$\theta(s) = \frac{B^2 bl}{s^2 (s + A)^2 I_{yy}} (u_3^2(s) - u_1^2(s)) \tag{5.14}$$

$$\psi(s) = \frac{B^2 d}{s^2 (s + A)^2 I_{zz}} (-u_2^2(s) - u_4^2(s) + u_1^2(s) + u_3^2(s)) \tag{5.15}$$

En réutilisant les variables U_2 , U_3 et U_4 plutôt que les tensions, on peut écrire :

$$\phi(s) = \frac{B^2 l}{s^2 (s + A)^2 I_{xx}} \left(\frac{A}{B} \right)^2 U_2 = \frac{A^2 l}{s^2 (s + A)^2 I_{xx}} U_2 \quad (5.16)$$

$$\theta(s) = \frac{B^2 l}{s^2 (s + A)^2 I_{yy}} \left(\frac{A}{B} \right)^2 U_3 = \frac{A^2 l}{s^2 (s + A)^2 I_{yy}} U_3 \quad (5.17)$$

$$\psi(s) = \frac{B^2}{s^2 (s + A)^2 I_{zz}} \left(\frac{A}{B} \right)^2 U_4 = \frac{A^2}{s^2 (s + A)^2 I_{zz}} U_4 \quad (5.18)$$

Numériquement, on trouve :

$$\phi(s) = \frac{0.5227}{0.00417 \cdot s^4 + 0.03893 \cdot s^3 + 0.09084 \cdot s^2} U_2 \quad (5.19)$$

$$\theta(s) = \frac{0.5227}{0.00417 \cdot s^4 + 0.03893 \cdot s^3 + 0.09084 \cdot s^2} U_3 \quad (5.20)$$

$$\psi(s) = \frac{21.78}{0.008321 \cdot s^4 + 0.07767 \cdot s^3 + 0.1812 \cdot s^2} U_4 \quad (5.21)$$

On voit que les systèmes ne contiennent pas de terme amortisseur, il faut donc en introduire un via le régulateur. Ainsi, on a cherché, par un placement de pôles sous Matlab, à contrôler les trois fonctions de transfert séparées ci-dessus. Malheureusement, cette méthode de dimensionnement n'a pas été fructueuse. On a donc dimensionné le régulateur par plusieurs simulations sous Simulink avec le système complet.

5.2 Simulation et détermination des paramètres

On rappelle que les fonctions de transfert ne possèdent pas de terme amortisseur. On va donc les introduire par les trois régulateurs PD :

$$\begin{aligned} U_2 &= -k_\phi \phi - d_\phi \dot{\phi} \\ U_3 &= -k_\theta \theta - d_\theta \dot{\theta} \\ U_4 &= -k_\psi \psi - d_\psi \dot{\psi} \end{aligned} \quad (5.22)$$

La première entrée de commande U_1 est la somme des portances. On fixera celle-ci comme constante.

Afin de déterminer les termes proportionnels et dérivés relatifs à chacun des régulateurs, des simulations ont été réalisées sous Simulink dans un ordre bien précis.

5.2.1 Régulateur PD sur modèle de l'hélicoptère découplé

On détermine les termes proportionnels et dérivés de façon grossière, tout d'abord en utilisant le modèle simplifié ne possédant pas d'effets gyroscopiques :

$$\ddot{\phi} = \frac{l}{I_{xx}} U_2 \text{ avec } U_2 = b(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \quad (5.23)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{l}{I_{yy}} U_3 \text{ avec } U_3 = b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \quad (5.24)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}} U_4 \text{ avec } U_4 = d(-\Omega_2^2 - \Omega_4^2 + \Omega_1^2 + \Omega_3^2) \quad (5.25)$$

On s'est dans une première phase occupé des deux premiers angles, le roulis et le tangage, qui ont le même comportement dynamique. En fixant les angles de départ de l'hélicoptère à 45° , on cherche ensuite les termes proportionnels K_p qui amèneront le système à une position horizontale avec un angle de lacet nul dans un temps raisonnable (moins d'une seconde). Il est bien entendu que sans terme dérivateur, le système sera instable.

Puis, une fois les termes K_p déterminés, on fait de même pour les termes dérivateurs et on arrive finalement à $K_p=1$ et $T_d=0.38$ pour les deux premiers angles.

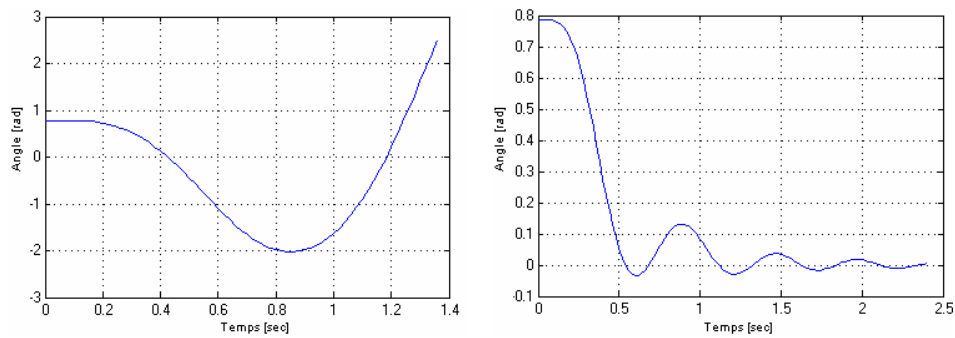


Fig. 5.1 Contrôle du roulis avec régulateur P ($K_p=1$) et PD ($K_p=1$ $T_d=0.38$)

Les oscillations amorties visibles sur le graphe de droite sont dues à la constante de temps mécanique des moteurs qui sont, dans ces simulations, utilisés en boucle ouverte. Ceci représente, dans la commande, un certain retard qui réduit la marge de stabilité. En effet, on sait qu'un retard dans un système contrôlé représenté dans le diagramme de Nyquist entraîne une rotation qui rapproche la courbe du point critique -1 .

En ce qui concerne le lacet, en fixant également l'angle de départ à 45° , on arrive également à de bons résultats avec $K_p=1$ et $T_d=0.5$.

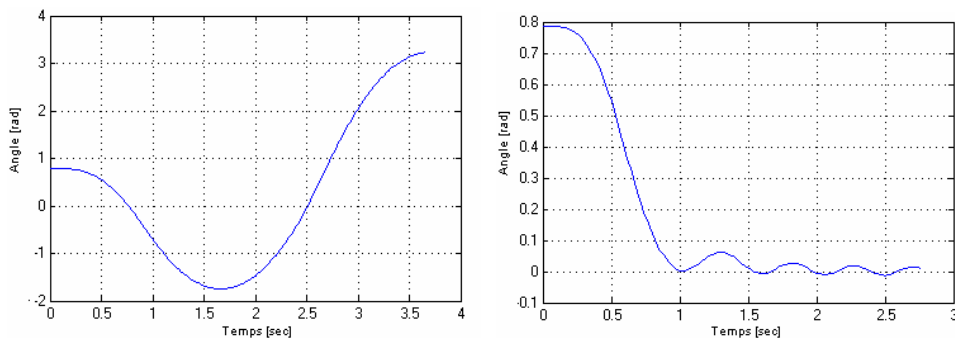


Fig. 5.2 Contrôle du lacet avec régulateur P ($K_p=1$) et PD ($K_p=1$ $T_d=0.5$)

5.2.2 Régulateur PD sur modèle de l'hélicoptère complet

En prenant cette fois-ci le modèle complet de l'hélicoptère incluant les effets gyroscopiques, on a tout d'abord cherché à adapter les termes P et D correspondant au contrôle du roulis et du tangage. Les deux graphes ci-dessous représentent le roulis et le tangage, initialisés à 45° et contrôlés avec les paramètres $K_p=1$ et $T_d=0.38$.

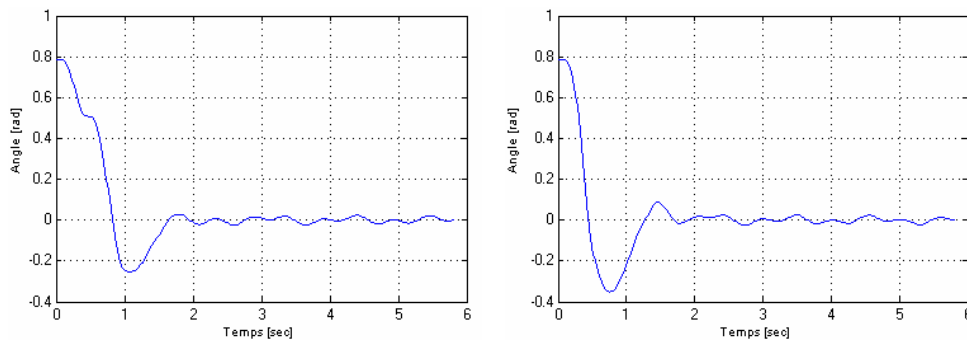


Fig. 5.3 Roulis et tangage avec régulateur PD ($K_p=1$ $T_d=0.38$) sur le modèle complet

On remarque que les performances sont moins bonnes, bien que le régulateur soit le même, ce qui montre que les effets gyroscopiques ne sont pas négligeables. On va donc chercher à ajuster les termes du régulateur pour éviter des dépassements trop importants et pour arriver à des angles nuls plus rapidement. Avec $K_p=0.8$ et $T_d=0.4$, les consignes sont atteintes en 1 seconde environ.

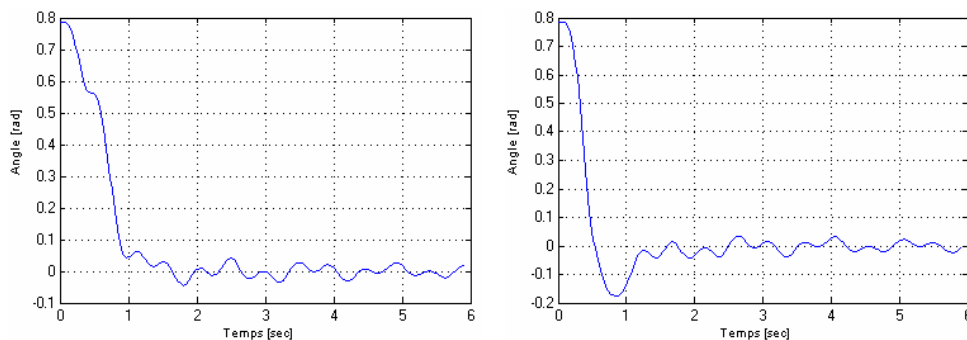


Fig. 5.4 Roulis et tangage avec régulateur PD ($K_p=0.8$ $T_d=0.4$) sur le modèle complet

Des vibrations non amorties apparaissent. Malheureusement, si l'on cherche à les éliminer en augmentant le terme dérivé, cela se fait au détriment du temps d'arrivée à la consigne. Or, il est très important de commander rapidement les angles de roulis et de tangage car l'hélicoptère doit être proche de l'horizontale afin d'assurer la portance de son propre poids. Les graphiques ci-dessous représentent le cas où tous les angles sont initialisés à 45° .

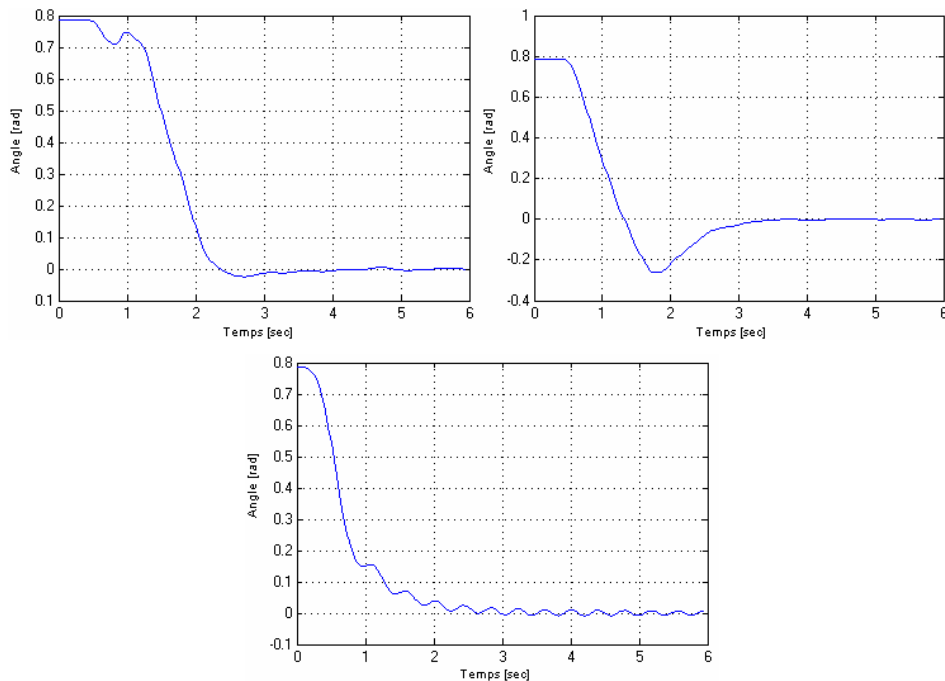


Fig. 5.5 Roulis, tangage et lacet avec régulateur PD ($K_p=0.8$ $T_d=0.4$ pour le roulis et le tangage $K_p=0.8$ $T_d=0.5$ pour le lacet) sur le modèle complet

On voit bien que les temps d'arrivée aux consignes sont plus grands. Or, comme mentionné auparavant, cette caractéristique est bien plus importante pour les deux premiers angles que pour le lacet. Ces deux angles doivent être contrôlés en priorité. Il faut donc que le régulateur du lacet possède un gain plus faible.

5.2.3 Conclusions intermédiaires

Les simulations ci-dessus montrent bien la difficulté de contrôler l'hélicoptère et ceci pour deux raisons principales :

- Les moteurs Faulhaber utilisés entrent constamment en saturation, car on demande en tout temps à la somme des portances des hélices de pouvoir supporter le poids de l'hélicoptère.
- La dynamique des moteurs doit être très rapide, ce qui n'est pas le cas dans les simulations qui ont été effectuées en boucle ouverte. Lors des tests sur le modèle réel, on verra que le comportement des moteurs contrôlés en vitesse est bien meilleur puisque la constante de temps est réduite.

5.3 Tests sur le modèle réel

On a donc implémenté en langage C++, sous l'environnement Windows, le régulateur PD dimensionné par simulation. Le schéma du système complet est représenté dans la figure ci-dessous :

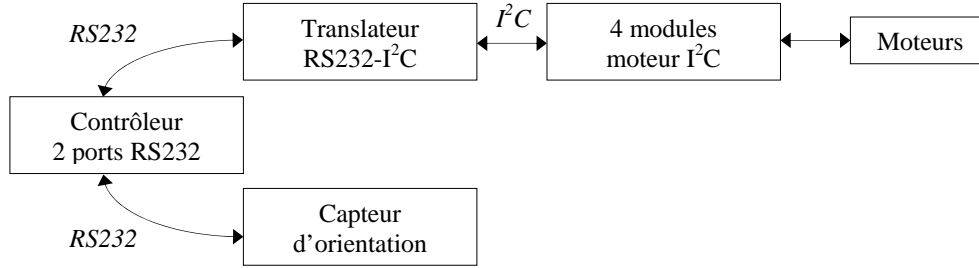


Fig. 5.6 Schéma du système de contrôle de l'hélicoptère

Les angles ainsi que les vitesses angulaires sont fournis par le capteur MT9-B de la société Xsens qui contient des accéléromètres, des gyroscopes et des magnétomètres. Il est relié à l'ordinateur par liaison série. Les consignes à fournir aux moteurs sont alors calculées puis envoyées, par port série également, vers le translateur I²C. Puis les quatre modules moteurs, reliés par bus I²C au translateur, comme les moteurs en tension par PWM sur une tension VCC de 18V.

Lors des premiers tests, l'hélicoptère n'était pas complètement ramené à l'horizontale mais un écart permanent subsistait, en particulier pour le roulis et le tangage. Ceci est dû au fait que le modèle réel n'est pas parfait et symétrique comme celui utilisé pour la simulation. Le facteur de portance des hélices n'est, par exemple, pas exactement le même pour chaque hélice. De plus, le capteur et les moteurs étant reliés par des câbles respectivement à l'ordinateur et aux modules moteur, des couples perturbateurs entrent en jeu. C'est la raison pour laquelle on a ajouté au régulateur de chaque angle un terme intégral en plus des termes proportionnel et dérivé.

Le régulateur implanté est le suivant :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 1.4 \\
 U_2 &= -0.9 \cdot \phi - 0.2 \cdot \dot{\phi} - 0.3 \cdot \int \phi \, dt \\
 U_3 &= -0.9 \cdot \theta - 0.2 \cdot \dot{\theta} - 0.3 \cdot \int \theta \, dt \\
 U_3 &= -0.06 \cdot \psi - 0.02 \cdot \dot{\psi} - 0.3 \cdot \int \psi \, dt
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

La période d'échantillonnage demandée est de 20ms, mais en réalité, en raison des autres programmes exécutés simultanément sur le processeur, la période mesurée vaut 31.3ms. Dans l'algorithme, la commande était donc celle-ci:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 1.4 \\
 U_2 &= -0.9 \cdot \phi - 0.2 \cdot \dot{\phi} - 0.01 \cdot \sum \phi \\
 U_3 &= -0.9 \cdot \theta - 0.2 \cdot \dot{\theta} - 0.01 \cdot \sum \theta \\
 U_3 &= -0.06 \cdot \psi - 0.02 \cdot \dot{\psi} - 0.01 \cdot \sum \psi
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Les graphiques suivants montrent l'évolution des angles dans le temps.

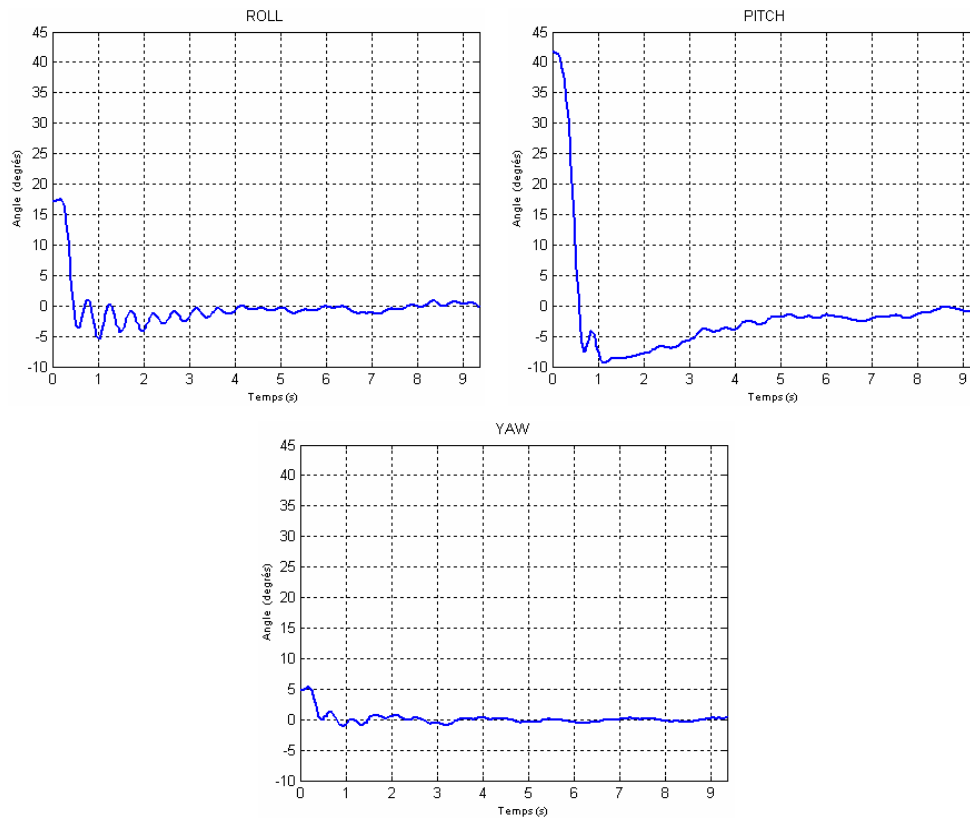
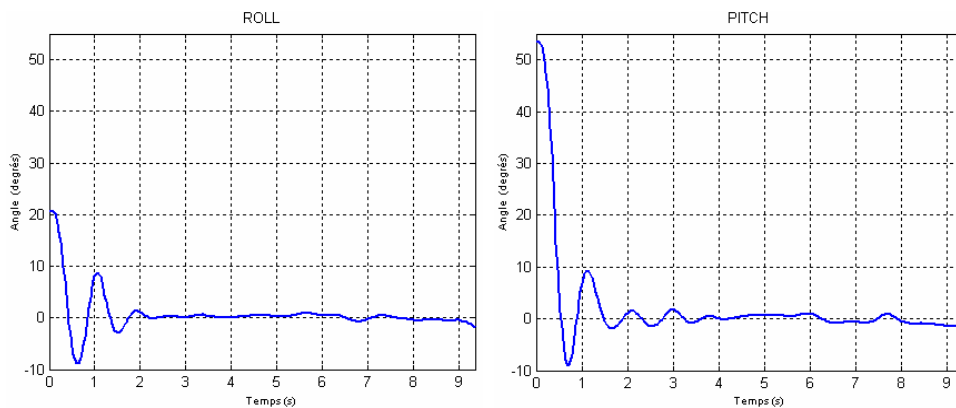


Fig. 5.7 Roulis, tangage et lacet avec régulateur PID ($K_p=0.9$ $T_d=0.2$ $T_i=0.3$ pour le roulis et le tangage $K_p=0.06$ $T_d=0.02$ $T_i=0.3$ pour le lacet) avec moteur Faulhaber en boucle fermée. $U_1=1.4$

Le tangage possède un important dépassement de consigne. Ceci est dû au terme intégral qui s'est fortement chargé puisque au départ, l'hélicoptère était loin de la position à atteindre. Un moyen d'éliminer ce problème est d'enclencher le terme intégral uniquement une fois que les angles se trouvent à une certaine proximité de la consigne.

Si l'on effectue les tests avec les mêmes moteurs mais en boucle ouverte, on obtient les angles suivants :



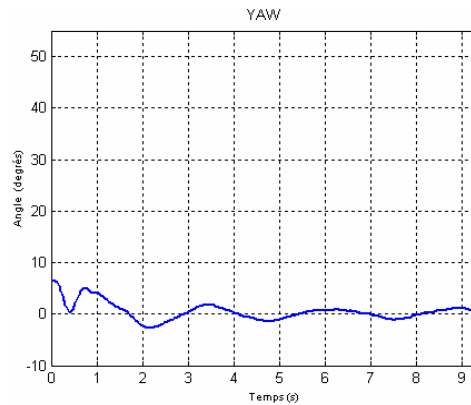


Fig. 5.8 Roulis, tangage et lacet avec régulateur PID ($K_p=0.9$ $T_d=0.2$ $T_i=0.3$ pour le roulis et le tangage $K_p=0.06$ $T_d=0.02$ $T_i=0.3$ pour le lacet) avec moteur Faulhaber en boucle ouverte. $U_1=1.4$

On voit que les consignes sont tout de même correctement atteintes, mais qu'il subsiste une vibration autour de la consigne plus importante que dans le cas de la boucle fermée.

Pourtant, dans les tests précédents, la portance demandée n'était que de 1.4N alors que l'hélicoptère, possédant une masse totale de 240g, nécessite une portance d'environ 2.35N. Si l'on effectue exactement le même test que précédemment mais en fixant $U_1=2.4$, on obtient les angles suivants :

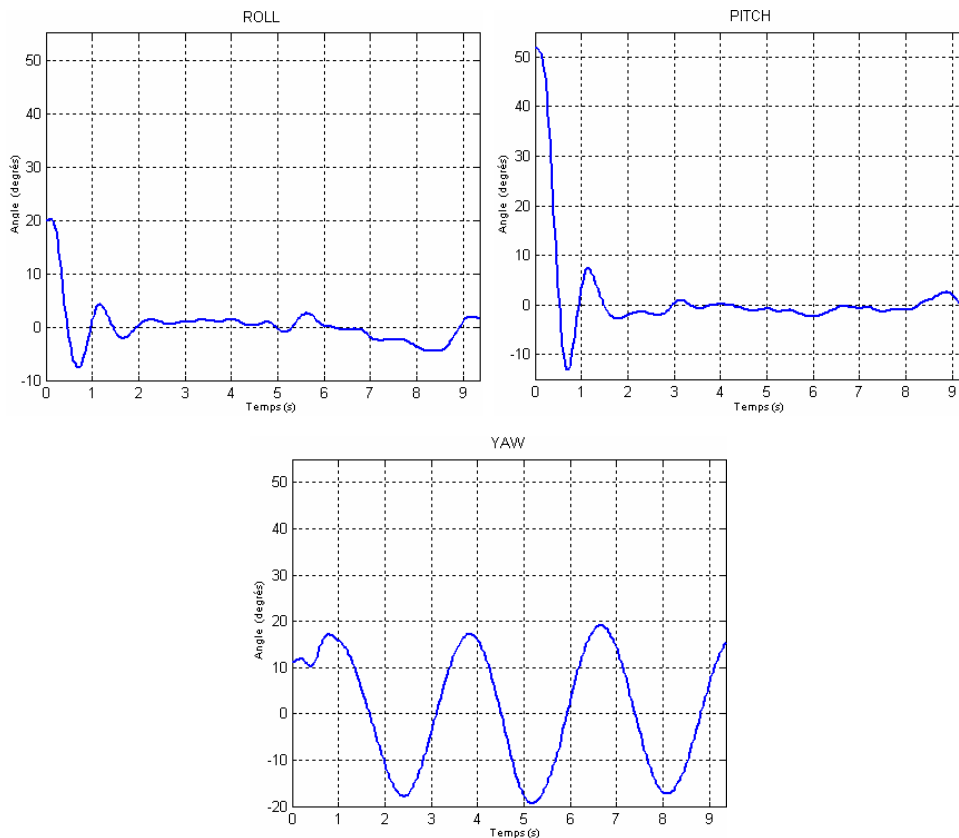


Fig. 5.9 Roulis, tangage et lacet avec régulateur PID ($K_p=0.9$ $T_d=0.2$ $T_i=0.3$ pour le roulis et le tangage $K_p=0.06$ $T_d=0.02$ $T_i=0.3$ pour le lacet) avec moteur Faulhaber en boucle ouverte. $U_1=2.6$

Le problème qui se présente ici est la saturation des moteurs Faulhaber comme on peut le voir dans les graphiques des vitesses des moteurs ci-dessous :

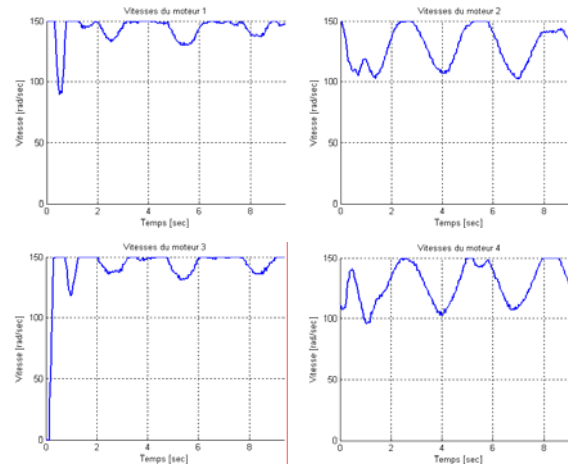
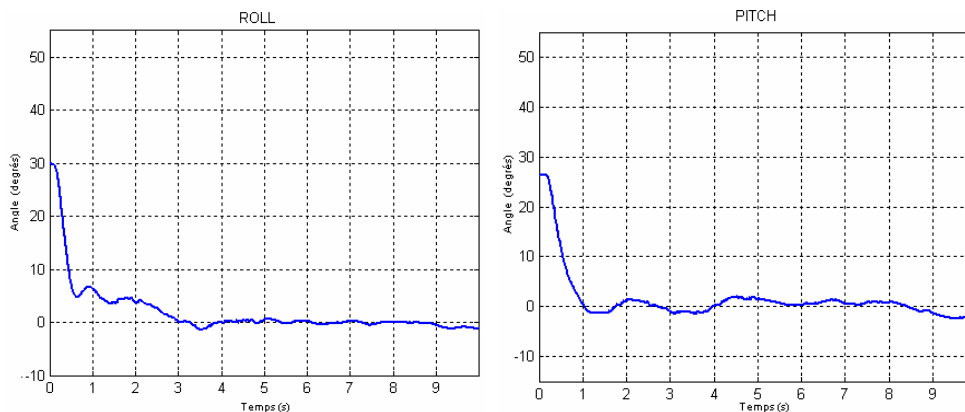


Fig. 5.10 Saturation des moteurs Faulhaber

Ceci montre la nécessité d'utiliser de petits moteurs puissants afin d'avoir de la marge sur la vitesse des moteurs autour de la vitesse nécessaire à la portance de l'hélico. En fin de projet, on a effectué les mêmes tests avec les nouveaux moteurs Portescap qui, comme il a été démontré précédemment, sont plus efficace au niveau de la portance mais possèdent une constante de temps plus élevée. Avec le régulateur suivant :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 2.4 \\
 U_2 &= -1.05 \cdot \phi - 0.3 \cdot \dot{\phi} - 0.004 \cdot \sum \phi \\
 U_3 &= -1.05 \cdot \theta - 0.3 \cdot \dot{\theta} - 0.004 \cdot \sum \theta \\
 U_4 &= -0.06 \cdot \psi - 0.01 \cdot \dot{\psi} - 0.001 \cdot \sum \psi
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

l'implémentation sur linux à une fréquence d'échantillonnage de 100Hz fournit de très bons résultats.



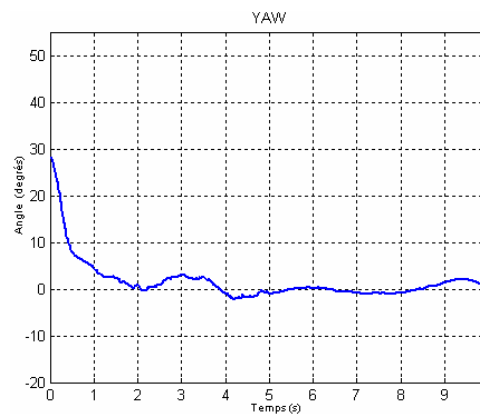


Fig. 5.11 Roulis, tangage et lacet avec régulateur PID ($K_p=1.05$ $T_d=0.3$ $T_i=0.4$ pour le roulis et le tangage $K_p=0.06$ $T_d=0.01$ $T_i=0.1$ pour le lacet) avec moteur Portescap en boucle ouverte. $U_1=2.6$

L'amélioration par rapport à l'expérience précédente réside essentiellement dans le fait que les moteurs Portescap n'entre pas en saturation.

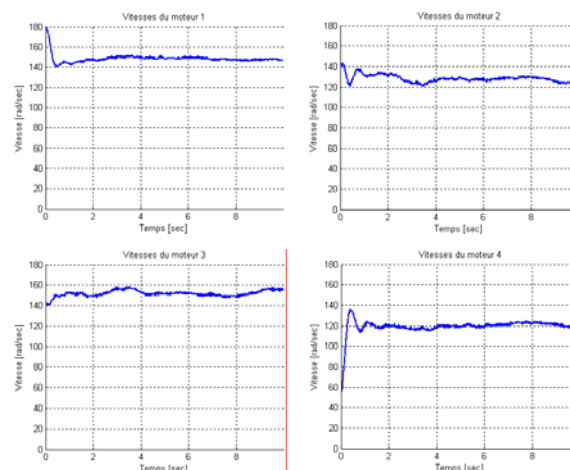


Fig. 5.12 Vitesses des hélices avec les moteurs Faulhaber

Avec ce contrôleur, un vol stationnaire de 20 secondes a été atteint. Au-delà de ce temps, l'échauffement des moteurs a dégradé leurs performances et donc diminué la portance totale.

5.3.1 Problèmes rencontrés

Dérive des données du capteur

Le capteur d'orientation utilisant des magnétomètres est sensible aux champs magnétiques qui sont apparemment important dans le laboratoire où ont été effectués les tests. L'entreprise Xsens a créé un algorithme qui permet de contrer cet effet de manière efficace. Une petite expérience permet de s'en rendre compte : on fait faire au capteur un mouvement parfaitement rectiligne de 50cm sur une surface plate avec un tube cathodique d'ordinateur à un demi-mètre. Les angles retournés sont présentés dans les 3

graphiques ci-dessous, avec ou sans l'algorithme de réjection des perturbations magnétiques.

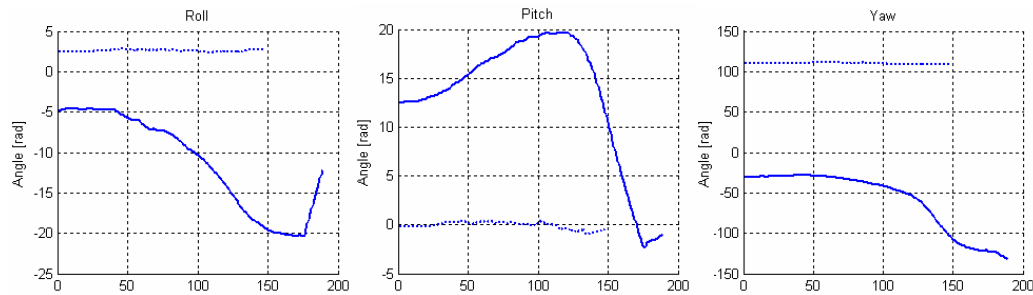


Fig. 5.11 Roulis, tangage et lacet en présence de perturbations magnétiques
(--- sans algorithme correcteur avec algorithme correcteur)

On se rend compte de son efficacité, mais il ne résout malgré tout pas le problème entièrement, puisque l'on a observé à long terme une dérive des angles, surtout en ce qui concerne le lacet.

Saturation des moteurs

Lorsque l'hélicoptère se trouve dans une position lointaine de l'état visé, les couples demandés au travers des variables U_2 , U_3 et U_4 peuvent ne pas être atteignables par les moteurs. Il s'en suit que les consignes fournies aux moteurs dépassent leurs possibilités et les moteurs saturent. Pour solutionner ce problème, on peut d'une part utiliser des moteurs plus puissants comme c'est le cas pour les moteurs Portescap par rapport aux moteurs Faulhaber. D'autre part, dans le contrôle des angles de roulis et de tangage, il est possible d'adapter la vitesse d'un moteur si son adverse sature afin que le couple demandé soit tout de même atteint et que l'hélicoptère arrive le plus rapidement possible à l'horizontale.

Terme intégrateur

Comme il a déjà été mentionné, le terme intégrateur joue correctement son rôle. Mais si l'hélicoptère part initialement d'une orientation importante, il se charge au départ et une fois l'hélicoptère à l'horizontale, il tend à lui faire continuer sa rotation. C'est la raison pour laquelle il doit être enclenché une fois que l'hélicoptère se situe dans un certain voisinage de l'état désiré.

5.4 Conclusion et critique de l'approche classique

Le contrôle PID de l'hélicoptère a fourni des résultats assez bons pour des angles de départs raisonnables. Mais dans le cas d'une orientation initiale lointaine de l'état visé, un grand gain va faire entrer les moteurs en saturation. Ainsi, le fait d'avoir un seul et même régulateur pour tous les états du système est un problème puisque le gain doit être suffisamment élevé pour l'hélicoptère se stabilise rapidement, sans toutefois faire saturer les moteurs.

De plus, chaque angle est contrôlé séparément et on ne tient donc pas compte, dans la commande, des effets de couplages gyroscopiques.

6 Synthèse et simulation d'un contrôleur avec une approche dite moderne

6.1 Théorie du contrôle optimal

6.1.1 Position générale du problème

Considérons un système contrôlé dont la dynamique s'exprime par un système de n équations différentielles :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (6.1)$$

dans lequel x désigne le **vecteur d'état**, u le **vecteur de contrôle** et t le **temps**. Le principe du contrôle optimal [10,11] consiste à trouver une loi de contrôle $u(t)$ tel que l'on minimise le critère :

$$J = K(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (6.2)$$

Posé sous cette forme, on appelle cette équation le **problème de Bolza**. Dans le cas où $K(x_f, t_f) = 0$, il s'agit du problème de **Lagrange** dans lequel on ne tient pas compte de l'état final du système. A l'opposé, si $L(x(t), u(t), t) = 0$, il s'agit du problème de **Meyer** dans lequel on ne tient pas compte de l'évolution du système de 0 à T mais uniquement de l'état final. On peut citer les exemples typiques suivants :

- le problème de l'intégrale de l'erreur au carré minimum. Il est à souligner ici que Q est une matrice semi-définie positive

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x^T Q x dt \quad (6.3)$$

- le problème de l'énergie minimum avec R symétrique définie positive

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T R u dt \quad (6.4)$$

- le problème de l'erreur finale minimum

$$J = \sum_{i=1}^n (x_{if} - x_i(t_f))^2 \quad (6.5)$$

6.1.2 Principe du maximum de Pontryagin

Si l'on introduit des variables adjointes ψ_1, \dots, ψ_n tel que

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\delta H}{\delta x_i} \quad (6.6)$$

où $H(x, \psi, u, t)$ est appelée fonction de Hamilton (ou Hamiltonien) défini par :

$$H(x, \psi, u, t) = \sum_i \psi_i f_i(x, u) - L(x, u, t) \quad (6.7)$$

Selon le principe du maximum de Pontryagin [1], la loi de contrôle optimal u' délivrera le maximum de la fonction de Hamilton (condition nécessaire d'optimalité) si:

$$H(x, \psi, u', t) = \max_{u \in G} (H(x, \psi, u, t)) \quad (6.8)$$

où G est l'ensemble des commandes possibles.

En l'absence de restriction sur la commande, le maximum peut être trouvé par la condition :

$$\frac{\partial H(x, \psi, u', t)}{\partial u} = 0 \quad (6.9)$$

Selon le **principe d'optimalité de Bellman**, découper une trajectoire optimale en sous-trajectoires crée des sous-trajectoires optimales. De même, les parties d'une trajectoire optimale sont elles-mêmes optimales. Ce principe permet d'obtenir une trajectoire optimale à long terme en optimisant le chemin pour des intervalles de temps très courts.

6.1.3 Commande Linéaire Quadratique

Dans le cas où le système d'équations différentielles (6.1) est un système linéaire ou linéarisé autour d'un point de fonctionnement, on peut le représenter sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (6.10)$$

La **Synthèse Linéaire Quadratique** dénommée **LQ** ou **LQR** (Linear Quadratic Regulator) consiste alors en la recherche d'une matrice de gain K_c telle que la commande par retour d'état

$$u(t) = -K_c x(t) \quad (6.11)$$

stabilise le système et minimise le critère quadratique :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (6.12)$$

où les matrices de pondérations Q et R satisfont :

$$Q = Q^T \geq 0 \quad R = R^T \geq 0 \quad (6.13)$$

Dans ce cas précis, la condition (nécessaire) d'optimalité de la dérivée nulle de la fonction Hamiltonienne (6.9) amène à la solution :

$$K_c = R^{-1} B^T P \quad (6.14)$$

où P obéit à l'équation algébrique de Riccati :

$$-PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q = \dot{P} \quad (6.15)$$

En considérant en régime permanent la solution P de cette équation, ce qui est fait dans la majorité des cas dans la littérature, il suffit de résoudre :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

6.2 Résolution de l'équation de Riccati [4]

Le problème qui survient maintenant consiste à résoudre une équation de Riccati. Il existe plusieurs méthodes mais seule la plus utilisée sera présentée. A partir de l'équation de Riccati générale (où les matrices A_r, B_r, C_r, D_r sont respectivement de dimensions $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ et $m \times m$ tandis que la solution X est de dimensions $m \times n$):

$$XB_r X + XA_r - D_r X - C_r = 0 \quad (6.16)$$

on construit tout d'abord la matrice dite Hamiltonienne :

$$H = \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

ce qui donne, en appliquant ceci au cas présent :

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

On peut montrer que les $2n$ valeurs propres de la matrice H sont constituées des n valeurs propres en boucle fermée de la matrice $A-BK_c$ et de leurs opposées, donc que si λ est valeur propre de H , alors $-\lambda$ l'est aussi [2].

Il existe donc n et seulement n valeurs propres dont la partie réelle est négative. Soit maintenant $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice associée à ces valeurs propres. Si l'on construit la matrice X , de dimension $2n \times n$, constituée des vecteurs propres associés, on a donc :

$$HX = X\Lambda \quad (6.19)$$

Finalement, en partitionnant X en deux sous matrices X_1 et X_2 , on peut démontrer que P choisi sous la forme :

$$P = X_2 X_1^{-1} \quad (6.20)$$

vérifie bien l'équation de Riccati.

6.3 Remarques

On parle d'optimisation **statique** lorsque l'indice de performances J présente un caractère instantané à l'échelle du système considéré. Un exemple est le rendement instantané d'un processus. L'optimisation devient **dynamique** si le critère de qualité met en jeu le temps. On rencontre fréquemment, dans ce cas, des fonctions de coûts [1].

Dans le cas de système SISO (*Single Input, Single Output*), on peut montrer [1] que le lieu de Nyquist de la fonction de transfert de boucle reste toujours à l'extérieur du cercle unité centré en -1 . Il en résulte les marges de stabilité :

Marge de gain $[0.5 ; +\infty]$

Marge de phase $[-60^\circ, +60^\circ]$

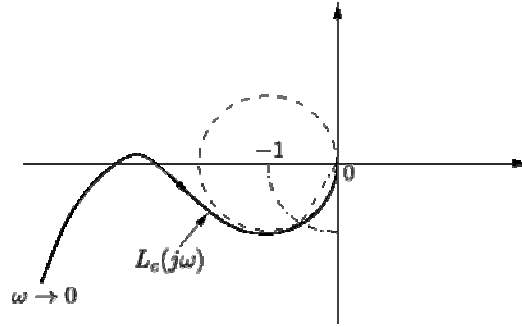


Fig. 6.1 Diagramme de Nyquist d'un système commandé par LQ

En revanche, dans le cas des systèmes MIMO (*Multiple input, multiple output*) cette propriété n'est pas toujours vérifiée.

6.4 Contrôle optimal avec linéarisation près de l'équilibre

Comme on a pu le voir dans le chapitre consacré à la modélisation, les équations dynamiques régissant le comportement de l'hélicoptère sont non-linéaires. Afin d'utiliser la synthèse linéaire quadratique, il est nécessaire de mettre le système sous la forme :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (6.21)$$

Ainsi, une première approche consiste à linéariser le tout autour de l'équilibre :

$$\frac{d}{dt} \delta x = J_z(x_0, u_0) \delta x + J_u(x_0, u_0) \delta u \quad (6.22)$$

$$J_x(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_u(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial u_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les Jacobiens ne dépendant pas des variables d'états ni des variables d'entrée, elles sont toujours constantes ce qui permet d'écrire :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{pmatrix}$$

On voit que cela revient à ne considérer que les effets de portance et de traînée des moteurs, mais à négliger les effets gyroscopiques.

6.5 Contrôle optimal adaptatif

On a vu que linéariser le système autour du point d'équilibre est simple, pourtant le problème est que les matrices A et B sont identiques pour tous les états du système mais correctes uniquement pour des orientations et des vitesses angulaires nuls. Une meilleure méthode permettant d'exprimer le système sous la forme (6.1) est de le linéariser pour chaque état. Chaque terme gyroscopique constitué d'une multiplication entre deux variables d'état est représenté 2 fois en considérant comme constant le premier terme et variable le second, puis inversement.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_y - I_z}{2I_x} \dot{\psi} & 0 & \frac{I_y - I_z}{2I_x} \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_z - I_x}{2I_y} \dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_z - I_x}{2I_y} \dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{I_x - I_y}{2I_z} \dot{\theta} & 0 & \frac{I_x - I_y}{2I_z} \dot{\phi} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_x} & 0 & 0 & \frac{I_r}{I_x} \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{I_y} & 0 & -\frac{I_r}{I_y} \dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Ainsi, ce système d'équations représente correctement la dynamique de l'hélicoptère dans un voisinage proche de l'état dans lequel il se situe. Les matrices A et B ne sont donc pas constantes, mais sont recalculées sur toute la trajectoire de l'hélicoptère. On dit alors qu'elles sont adaptatives.

Maintenant que le système est sous une forme linéaire, l'étape suivante consiste à exprimer le critère J à minimiser :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

par un choix correct de Q et R.

La volonté d'atteindre la consigne désirée est exprimée par les termes diagonaux de Q qui chacun vont multiplier les variables d'état élevées au carré.

En ce qui concerne la volonté de minimiser l'énergie du système, l'énergie cinétique d'un corps en rotation étant exprimée comme la vitesse élevée au carré que multiplie l'inertie, on peut utiliser à nouveau les éléments diagonaux de Q multipliant les vitesses angulaires de roulis, tangage et lacet.

6.5.1 Méthode de Pearson

La méthode de Pearson [3] consiste à considérer la solution de l'équation de Riccati comme permanente, donc à négliger dans (6.15) sa dérivée, ce qui amène à résoudre :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6.25)$$

Ainsi, l'algorithme de commande sera exécuté comme suit dans chaque intervalle de temps (t_k, t_{k+1}) : au temps t_k , les variables d'états sont mesurées et les matrices A,B,Q et R évaluées. L'équation algébrique ci-dessus est résolue, ce qui permet de déterminer la matrice de contre-réaction K. Le vecteur de commande est alors généré dans l'intervalle partiel. Il faut remarquer que ce modèle représente fidèlement le système à régler dans l'intervalle partiel considéré, mais pas de t_{k+1} à l'infini.

Simulation

On a simulé le comportement de l'hélicoptère avec cette méthode ; tout d'abord en considérant la dynamique complète sans les moteurs, puis une seconde fois en incluant le modèle des moteurs Portescap développé au chapitre 4. Afin d'avoir une meilleure compréhension de l'algorithme utilisé, le code Matlab du fichier de contrôle ont été mis en annexe.

Ainsi, en partant avec des angles assez distants de l'état à atteindre (roulis = $\pi/2$, tangage = $-\pi/2$, lacet = $-\pi/2$), en fixant $U_1=2.6$, et en donnant plus de poids à l'atteinte des consignes qu'à l'énergie par les matrices Q et R :

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient en omettant le modèle des moteurs :

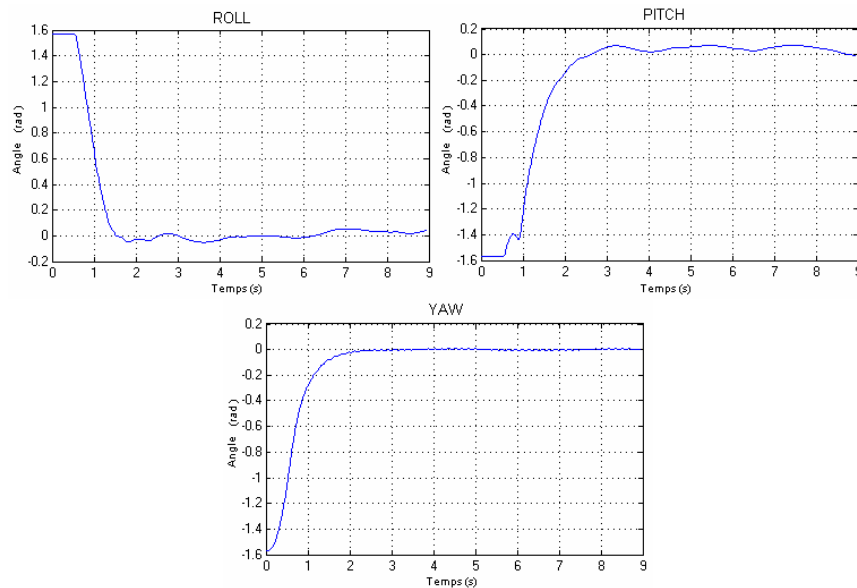


Fig. 6.2 Simulation de la commande LQ (méthode de Pearson) sans le modèle des moteurs

Les consignes sont rapidement atteintes et il n'y a quasiment pas de dépassement. En revanche, quelques perturbations apparaissent à long terme. La matrice de gain K vaut lorsque l'hélicoptère est stabilisé :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22.36 & 10.04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22.36 & 10.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22.36 & 10.02 \end{pmatrix}$$

On constate donc que cette commande fonctionne correctement, moyennant un bon choix des matrices Q et R , mais l'équation linéaire (6-10) à partir de laquelle on a développé la commande possède des entrées qui ne sont pas instantanées, mais possèdent une dynamique : celle des moteurs. Si on inclut dans la simulation le modèle dynamique des moteurs Portescap, on obtient de moins bons résultats :

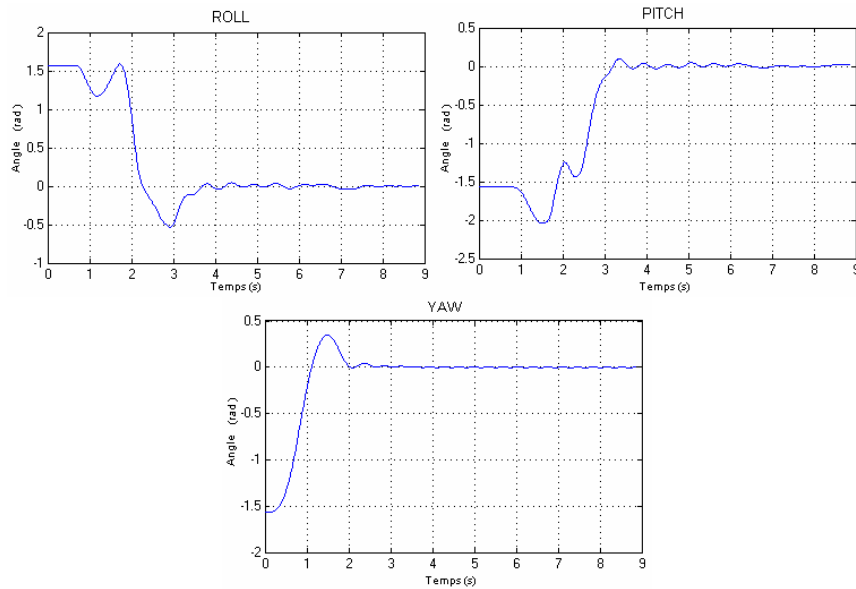


Fig. 6.3 Simulation de la commande LQ (méthode de Pearson) avec le modèle des moteurs

On voit bien que, comme dans la commande on fait abstraction de la dynamique des moteurs, le régulateur optimal avec la méthode de Pearson n'est de loin pas aussi performant. On va voir que l'on obtient déjà de bien meilleurs résultats en tenant compte de la dérivée de l'équation de Riccati.

6.5.2 Méthode de Sage – Eisenberg

Contrairement à la méthode de Pearson, Sage et Eisenberg [3] proposent de ne pas considérer la solution de l'équation de Riccati comme permanente, donc de prendre en compte sa dérivée, mais de fixer la condition finale :

$$P(t_f) = 0 \quad \text{où } t_f \text{ représente le temps où le système sera stable}$$

L'algorithme de commande se déroule comme décrit dans la méthode de Pearson à la différence qu'à chaque intervalle, on intègre à rebours l'équation de Riccati.

$$\dot{P}_t = -P_t A - A^T P_t + P_t B R^{-1} B^T P_t - Q \quad (6.26)$$

Si l'on discrétise, le problème, on peut remplacer la dérivée de P par :

$$\dot{P}_t = \frac{P_{t+h} - P_t}{h} \text{ avec } h \text{ suffisamment petit} \quad (6.27)$$

on obtient ainsi:

$$0 = -P_t(hA - I) - (hA^T)P_t + P_t(hBR^{-1}B^T)P_t - (hQ + P_{t+h}) \quad (6.28)$$

Ce modèle représente fidèlement le processus dans l'intervalle partiel considéré, mais pas de t_{k+1} à t_f . On peut toutefois espérer de meilleurs résultats que ceux fournis par la méthode de Pearson où l'intervalle de temps dans lequel le modèle n'est pas valide se prolonge jusqu'à l'infini [3].

En plus des matrices Q et R, deux nouveaux paramètres de la commande apparaissent : le temps final t_f et le nombre d'itérations n qui est relié à la période d'itération h par :

$$h = \frac{t_f}{n}$$

En ce qui concerne n, on a pu voir que la solution convergeait relativement bien après 15 à 20 itérations. On notera que choisir $t_f = \infty$ et $n_{\text{itérations}} = 1$ ramène à la méthode de Pearson.

Simulation

En prenant les même matrices de pondération Q et R utilisées pour la méthode de Pearson et en fixant les paramètres $t_f = 0.3s$ et $n_{\text{itérations}} = 10$, on a implémenté le contrôle de cette méthode sous Simulink. En plus d'utiliser le modèle complet donc incluant la dynamique des moteurs Portescap, on a également inclus le fait que l'échantillonnage et le contrôle ont lieu à une période de 100Hz afin de se rapprocher au maximum de la réalité. A nouveau, le code Matlab du fichier de contrôle a été mis en annexe. La matrice de gain de contre-réaction vaut lorsque l'hélicoptère est stabilisé :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12.83 & 10.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12.83 & 10.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12.86 & 10.01 \end{pmatrix}$$

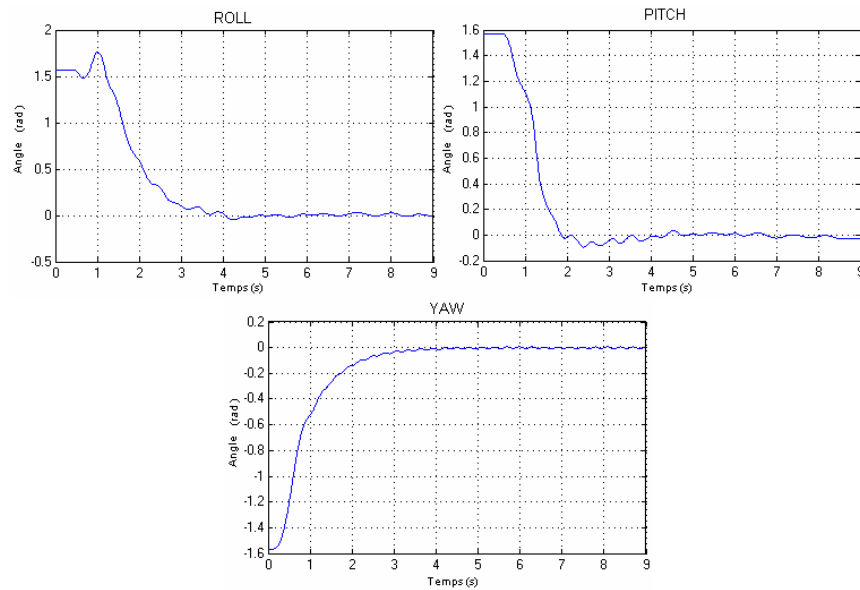


Fig. 6.4 Simulation de la commande LQ (méthode de Sage-Eisenberg) avec le modèle des moteurs

On se rend rapidement compte que cette méthode est plus efficace, pour les mêmes conditions, que la méthode de Pearson. On peut alors se demander ce qu'il se passe lorsqu'on augmente l'horizon de temps t_f . Les deux simulations suivantes montrent le comportement du même environnement avec pour seul changement $t_f=0.1s$, puis $t_f=0.05s$.

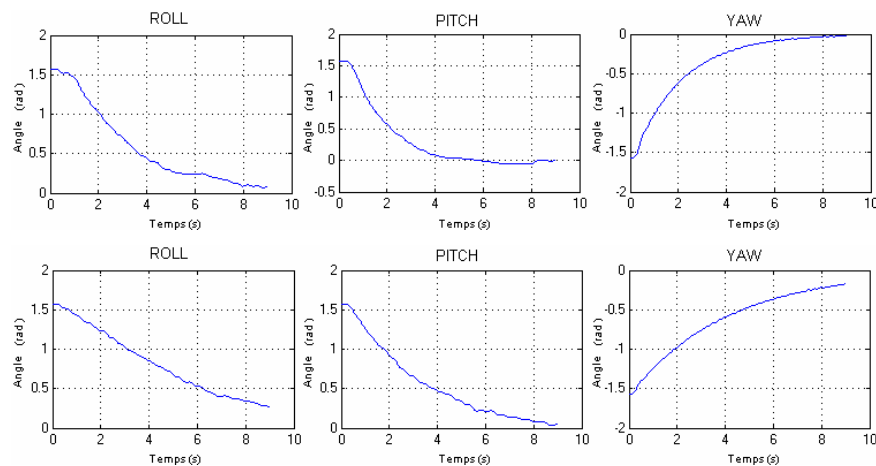


Fig. 6.5 Simulation de la commande LQ avec variation de l'horizon de temps (haut : $t_f = 0.1s$ bas : $t_f = 0.05s$)

On voit donc que le fait de minimiser t_f , dans notre cas, améliore la trajectoire qui ne comprend aucun dépassement (comme sur le roulis de la figure 6.4) mais qu'en revanche, le temps pour atteindre les consignes est bien plus élevé.

Si on reprend le cas où l'horizon de temps vaut 0.3 secondes, le résultat est assez bon mais il faut toutefois faire attention au fait que les consignes de vitesse sont presque

toujours en saturation, ce dont on a tenu compte dans le modèle. Malgré tout, les moteurs filtrent ces consignes.

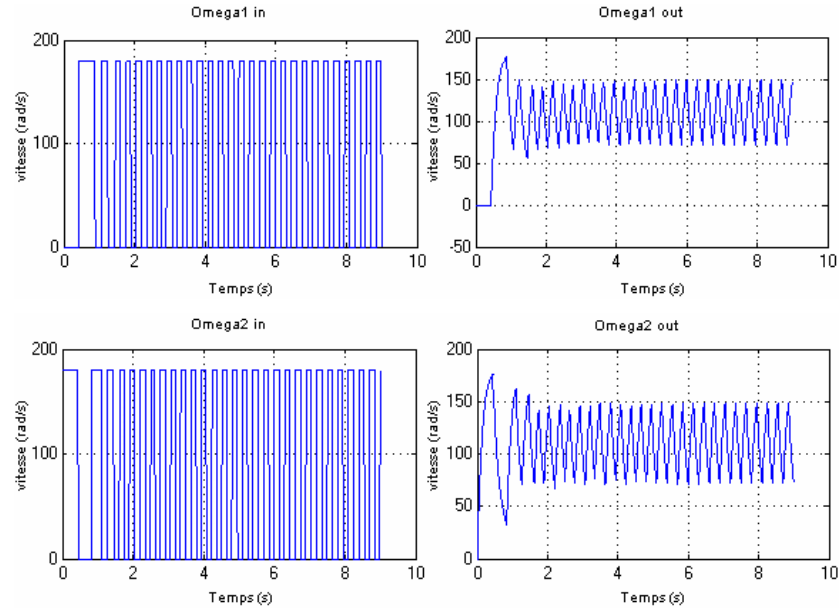


Fig. 6.6 Consignes de vitesses et vitesses de sorties des moteurs 1 et 2

6.6 Tests sur le modèle réel

Sur le modèle réel, il a été difficile de trouver les bonnes matrices de poids donnant un contrôle stable. Malgré tout, en choisissant :

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que $t_f=0.05$ et $n = 10$, pour ne pas obtenir un temps de calcul trop élevé, le système se stabilise rapidement.

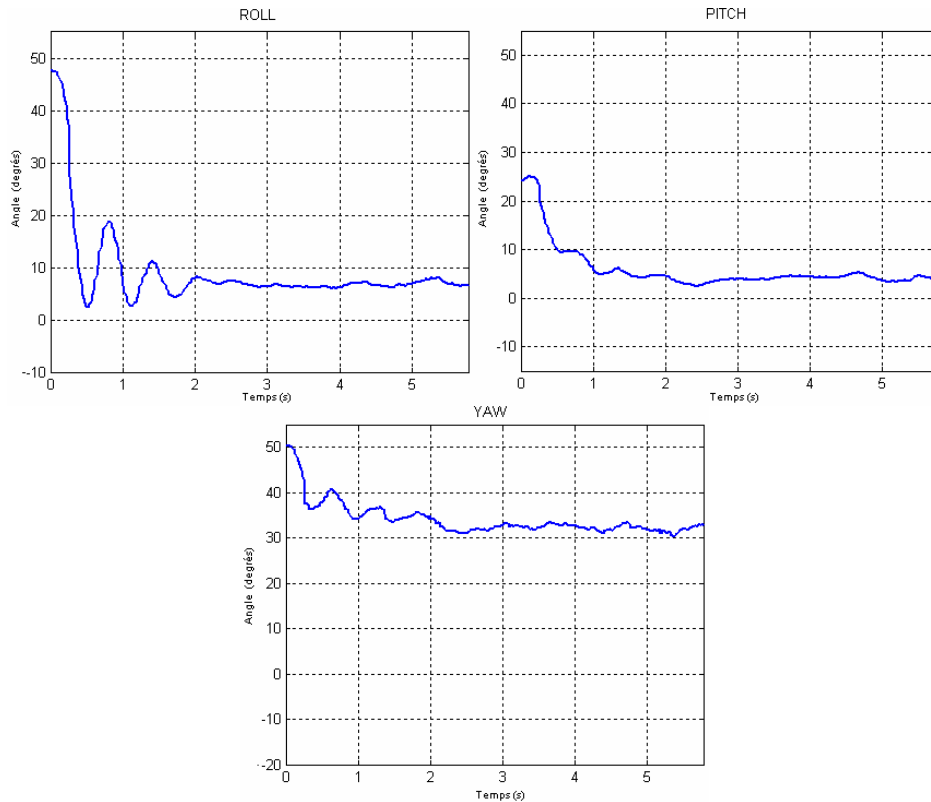


Fig. 6.7 Implémentation d'un régulateur LQ sur le modèle réel

En revanche, il subsiste toujours des écarts permanents, dus aux légères différences des moteurs et des portances des hélices, aux frottements et aux câbles. Alors que dans un régulateur PID le terme intégrateur pallie ces dépassements, ici la matrice de gain de contre-réaction K ne multiplie que les variables d'états, donc les angles et les vitesses angulaires. En d'autre terme, il s'agit d'un régulateur PD s'adaptant au fil de la trajectoire. Une fois l'OS4 stabilisé, la matrice de gain vaut :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0597 & 0.3912 & -0.0015 & 0 & 0 & 0.0014 \\ 0.0007 & 0 & 1.0597 & 0.3912 & 0 & -0.0004 \\ 0.0051 & 0.0029 & -0.0002 & -0.0001 & 0.0157 & 0.0288 \end{pmatrix}$$

6.7 Conclusions et critique de la méthode moderne

Le principe la commande optimale qui est de minimiser un certain critère exprimant par exemple l'énergie d'un système est intuitivement facile à comprendre et fonctionne très bien dans le cas de système linéarisés (6.10) avec un régulateur linéaire quadratique.

La méthode de Pearson ne constitue pas vraiment une commande optimale, mais plutôt sous-optimale, étant donné qu'elle résout l'équation Riccati de manière simplifiée. En revanche, la méthode de Sage-Eisenberg, qui ne fait pas cette simplification, donne de meilleurs résultats.

Dans le cas de l'hélicoptère tel qu'on l'a modélisé, les entrées du modèle ne sont pas directement la tension de moteurs, mais la différence de portance des hélices adverses ainsi que le moment de trainée total. Hors, ces grandeurs ne sont pas commandables

instantanément mais elles possèdent une dynamique liée aux groupes propulseurs composés des moteurs, des réducteurs et des hélices. C'est le fait que cette dynamique ne soit pas connue du régulateur qui a entraîné des résultats peu satisfaisants. Il faudrait pouvoir exprimer le système complet sous la forme 6.10 avec les tensions comme variables d'entrées.

Le choix des matrices de pondération Q et R est également délicat, mais déterminant pour le comportement du système commandé. Il n'existe pas de règle précise pour leur dimensionnement.

Toutefois, en cherchant à modéliser d'une manière plus complète la dynamique totale, la technique du contrôle optimal devrait fournir de meilleurs résultats. En effet, elle possède l'avantage de fournir un régulateur différent adapté à chaque état du système, contrairement au régulateur PID.

7 Implémentation du contrôle sous Linux

Le but à long terme du projet est d'obtenir un hélicoptère totalement autonome, donc d'effectuer le contrôle sur une carte embarquée qui y sera totalement dédiée et devra être rapide. C'est la raison pour laquelle on a choisi d'installer une version du système d'exploitation Linux.

Afin de s'approcher des conditions de contrôle que l'on aura alors mais pour garder tout de même une facilité de mise en œuvre, le contrôle a été implémenté sur un ordinateur Compaq muni d'un processeur Intel Pentium III cadencé à 450Mhz. La version de Linux installée est Mandrake 9.2.

7.1 Librairies installées

7.1.1 Librairies du capteur MT9-B

Afin d'accéder au capteur d'orientation, Xsens fournit pour Linux des versions pré-compilées par différents compilateurs. Les deux fichiers nécessaires sont alors le fichier objet approprié (libmobject.so.0.0.6) ainsi que le fichier en-tête (MotionTracker.h).

7.1.2 Librairies de calcul scientifique CBlas et CLapack

La méthode du contrôle optimal, comme on l'a mentionné lors de son explication théorique, nécessite l'utilisation de fonctions mathématiques telles que détermination des valeurs et vecteurs propres, inversions, etc. Ces fonctions sont non triviales et gourmandes en temps de calcul, raisons pour lesquelles on a installé les librairies Cblas, pour l'algèbre linéaire de base, et Clapack, pour les systèmes linéaires et le calcul des valeurs propres, disponible à l'adresse www.netlib.org.

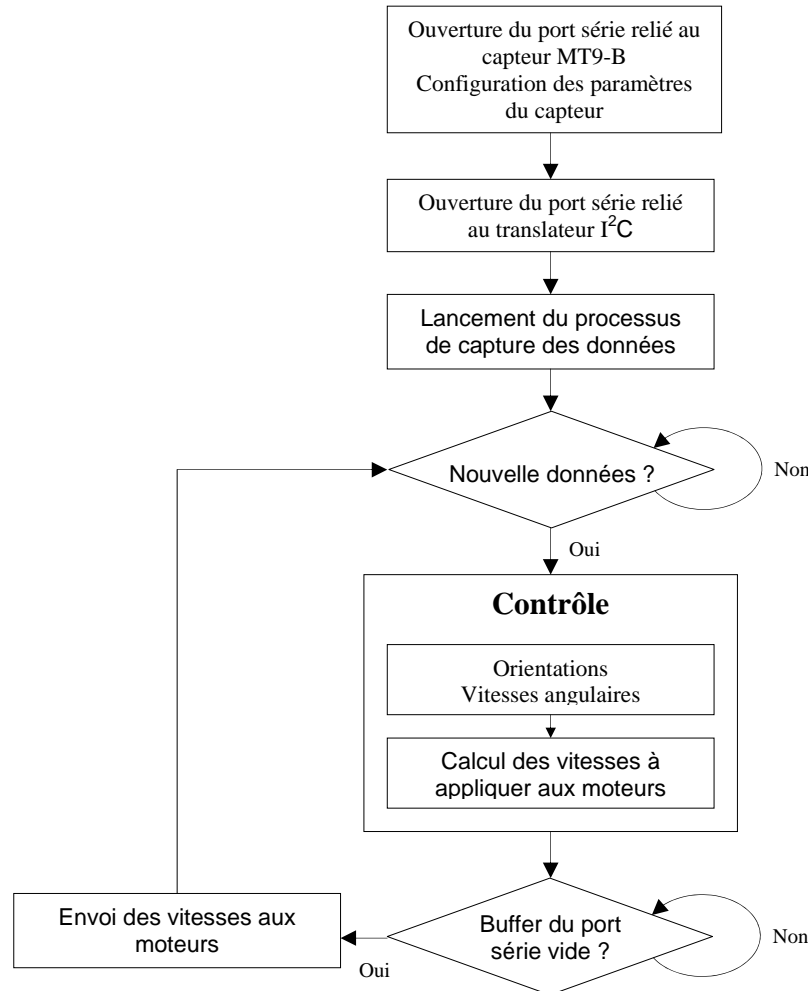
Ces librairies sont utilisées par Matlab, Mathematica et bien d'autres programmes de calcul scientifique. Elles sont extrêmement rapides, car elles utilisent le cache du processeur.

On a tout d'abord installé Atlas, qui comprend les fonctions les plus courantes de CBlas et CLapack, mais il a été nécessaire ensuite d'installer CLapack complètement afin d'avoir accès à la fonction du calcul des valeurs propres. L'installation successive de ces deux librairies n'est pas triviale surtout au niveau des liens à effectuer entre elles d'une part, puis entre elles et le programme appelant d'autre part, puisque l'ordre des liens aux librairies est important. [13] explique toutefois très bien les différentes étapes à suivre dans cette installation.

Un des problèmes de ces librairies se situe au niveau de la place mémoire nécessaire qui est de 110Mb, mais il existe également des versions pré-compilées pour une large palette de systèmes. Ainsi, il est possible de ne prendre que les fichiers correspondant aux fonctions mathématiques voulues, ce qui permet un gain de place mémoire important.

7.2 Schéma fonctionnel

Le schéma fonctionnel du régulateur implémenté sous Linux est le suivant :



7.3 Rapidité d'exécution

Les valeurs du capteur d'orientation sont réactualisées à une fréquence de 100Hz. En ce qui concerne les envois des consignes de vitesses aux moteurs, on a utilisé tout d'abord les bibliothèques conçues pour le robot Smartease. Ainsi, à chaque boucle de contrôle, quatre appels à la fonction `I2C_write` étaient effectués, ce qui prenait à chaque fois 38.5ms. La vitesse de transmission effective pouvait alors être aisément calculée en sachant que, pour chaque commande, l'envoi de trois bytes sont nécessaires :

$$Vitesse = \frac{4 \cdot 3 \cdot 8}{0.0385} = 2493.5 \text{ bits/s}$$

On réalise que la vitesse est largement inférieure aux 115200 bauds spécifiés lors de l'ouverture de la connexion série. Le problème vient en fait de la fonction `tcdrain` qui prend en argument le fichier correspondant au port série (*file descriptor*) et attend que le buffer des données à envoyer soit vide. Pour des raisons que l'on n'a pas pu déterminer, elle

possède un long temps d'attente. En l'appelant uniquement après avoir envoyé les quatre consignes de vitesses, on arrive à un temps nécessaire total de 10ms et les données sont correctement expédiées. On a alors créé une fonction `write_motor` qui ne contrôle pas si le buffer est vide, mais qui se contente d'y ajouter les données. Ce n'est qu'après quatre de ses appels que l'on utilise *tcdrain* pour être certain que les données ont été correctement transmises.

Comme on peut le voir sur le schéma d'exécution du programme, on appelle en fait *tcdrain* juste avant l'envoi des prochaines consignes. De cette manière, le temps nécessaire à l'envoi des données sur le bus sériel est utilisé pour l'acquisition des données suivantes et le calcul des consignes vitesses.

Ainsi, la boucle de contrôle complète s'exécute à une fréquence de 100Hz dans le cas du régulateur PID car le calcul des consignes est simple et donc très rapide. En revanche, lorsqu'on implémente la commande optimale avec un nombre d'itérations $n=10$, la masse de calcul plus importante fait descendre la fréquence à environ 35Hz.

8 Conclusions et améliorations proposées

Modélisation

La modélisation de l'OS4 a clairement mis en évidence les différents effets qui régissent sa dynamique : les couples dus aux portances aux traînées des hélices, mais également les effets gyroscopiques qui entraînent un couplage entre les angles.

Un modèle des groupes propulseurs, comprenant le moteur, le réducteur et l'hélice, a aussi été développé puis validé par expérience.

Capteur

Le capteur MT9-B fournit de bonnes valeurs, mais dans des environnements perturbés magnétiquement, les écarts sont tout de même importants. Au cours de ce projet, la société Xsens a sorti une nouvelle version de ses bibliothèques contenant un meilleur filtre de réjection des perturbations magnétiques ce qui a sensiblement amélioré l'obtention des angles et des vitesses angulaires, sans pour autant totalement résoudre le problème. Il est donc important de suivre les nouvelles mises à jour et il serait également intéressant de chercher d'autres fournisseurs de ce type de capteur.

Technique de contrôle

Le régulateur **Proportionnel Intégral Dérivé** a fourni de bons résultats lorsque l'hélicoptère ne se trouvaient pas dans un état trop lointain de l'état visé. Dans le cas contraire, les moteurs saturaient rapidement, n'assurant plus la portance totale demandée. Ainsi, le fait que les termes proportionnel, intégral et dérivé soient les mêmes pour tous les états est très limitatif pour un tel système.

De plus, ce type de régulateur agit séparément sur chaque angle et ne tient pas compte des couplages dus aux effets gyroscopiques. Malgré tout, un vol stationnaire durant plus de 20 secondes a été obtenu.

Pour l'implémentation du **Contrôle Optimal**, on a utilisé un modèle du système linéarisé de manière adaptative. Celui-ci prend en compte les effets gyroscopiques mais pas la dynamique des groupes propulseurs : ses variables d'entrée sont directement les couples non conservatifs exercés sur les trois angles. Le fait que cette dynamique ne soit pas connue du régulateur a entraîné des résultats mitigés en simulation mais peu satisfaisants sur l'hélicoptère réel.

Le choix des matrices de pondération est aussi un problème difficile qui ne connaît pas de solution absolue. En s'efforçant malgré tout de linéariser d'une manière plus complète la dynamique totale, la technique du contrôle optimal devrait fournir de meilleurs résultats. Son grand avantage par rapport au régulateur PID est de fournir un régulateur différent adapté à chaque état du système.

Mécanique

Dans la configuration actuelle, les moteurs sont disposés aux extrémités de l'armature de l'OS4. Il serait possible de les ramener au centre et de transmettre le couple par des courroies afin que l'inertie soit diminuée. C'est pourquoi il pourrait être intéressant d'étudier la stabilité de l'hélicoptère en fonction de la disposition des masses importantes (moteurs, capteurs,...) mais également de l'inclinaison des rotors, etc.

Moteurs et groupes propulseurs

Au-delà de la méthode de contrôle utilisée, on a également fait apparaître que la dynamique des groupes propulseurs joue un rôle très important. Premièrement, il est nécessaire de disposer, autour de la vitesse permettant la sustentation de l'hélicoptère, d'une marge de manœuvre suffisante. En effet, si celle-ci est trop restreinte, les moteurs entrent en saturation rapidement ce qui ne permet pas d'assurer un bon contrôle. Deuxièmement, la dynamique des ensembles moteur - réducteur - hélice doit être rapide afin d'atteindre les consignes de vitesse rapidement. Grâce au modèle développé, on se rend que la principale limitation provient de l'inertie des hélices qui doit être minimisée le plus possible. Le fait de contrôler les moteurs en vitesse améliore également la constante de temps. Il est aussi nécessaire de caractériser séparément les groupes propulseurs car les moteurs, les réducteurs et les hélices ne sont pas tous identiques. Finalement, l'échauffement des moteurs est aussi un élément important : d'après les expériences, il entraînait une perte sensible de performance après une trentaine de secondes déjà. Il conviendrait de dresser un modèle thermique des moteurs et d'étudier plusieurs méthodes (radiateurs,...) permettant de les refroidir.

D'un point de vue personnel, j'ai trouvé ce travail de diplôme très intéressant pour deux raisons principales. Le domaine qu'il touche, le modélisme aéronautique, est difficile, mais passionnant et en plein essor. De plus, les tâches à accomplir ne se limitaient pas à un seul domaine, mais regroupaient de la programmation sous Windows mais également Linux, domaine inconnu pour moi jusqu'alors, de la modélisation, de la théorie du contrôle, de la mécanique et de l'expérimentation.

9 Remerciements

Je tiens à remercier Samir Bouabdallah qui, par ses précieux conseils, m'a guidé et à maintes fois aidé dans ce travail de diplôme.

Merci également à Mohamed Bouri et Philippe Müllhaupt pour leur appui dans les problèmes d'automatique.

Finalement, merci pour leur disponibilité aux membres de l'ASL qui m'ont aidé à résoudre certains problèmes spécifiques.

Lausanne, le 20 février 2004

André Noth

10 Bibliographie

- [1] **P.NASLIN**
Introduction à la commande optimale
Bibliothèque de l'Automaticien, Dunod, Paris 1966
- [2] **Daniel ALAZARD**
Robustesse et commande optimale
Cépaduès-Editions, France, 1999
- [3] **Roland LONGCHAMP**
Commande sous-optimale adaptative de systèmes non-linéaires, Thèse no 303
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1978
- [4] **Peter LANCASTER, Leiba RODMAN**
Algebraic Riccati Equations
Clarendon Press, Oxford, 1995
- [5] **Oliver TANNER**
Modeling, identification and control of autonomous helicopter
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 2003
- [6] **Qiang LU, Yuanzhang SUN, Shengwei MEI**
Nonlinear control systems and power system dynamics
Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001
- [7] <http://www.iro.umontreal.ca/~benallam/these/chap2/chap2.htm>
Thèse de Mohamed Bénallal sur un système de calibration de caméra expliquant clairement les rotations dans l'espace.
- [8] <http://artemis.univ-mrs.fr/cybermeca/Formcont/mecaspa/SCAO/QUATERN/QUATERN1.HTM>
Cours de mécanique générale sur la dynamique d'un satellite, explication des rotations dans l'espace et de leur caractérisation.
- [9] <http://lpm.univ-fcomte.fr/Cours/devel/C1.pdf>
Théorie sur l'inertie d'un système.
- [10] <http://www.geocities.com/levinkirill/SpaceModel/eng/OptimalControl.html>
Théorie du contrôle optimal appliquée aux lanceurs orbitaux
- [11] <http://web.nps.navy.mil/~me/blackboard/me4811/docs/notes6.pdf>
Théorie succincte du contrôle optimale
- [12] http://www.supaero.fr/module/cs304/docu/cours_note2/node9.html
Théorie sur la commande linéaire quadratique
- [13] <http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/PHoM/CMPSc.1.1/index.html>
Explication de l'installation des librairies de calcul scientifique Atlas et CLapack

11 Annexes

11.1 Détails de calcul

Comme on l'a vu au chapitre 2, les énergies cinétique et potentielle sont respectivement exprimées comme :

$$T = \frac{1}{2} I_{xx} (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{yy} (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{zz} (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta)^2$$

$$V = g \int (-\sin \theta \cdot x + \sin \phi \cos \theta \cdot y + \cos \phi \cos \theta \cdot z) dm(r)$$

$$V = \int x dm(x) \cdot (-g \sin \theta) + \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \cos \theta) + \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \cos \theta)$$

Le Lagrangien vaut :

$$L = T - V$$

Les équations de mouvement sont alors données par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \tau_{\psi} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau_{\phi} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_{\theta}$$

On va dans la suite développer ces 3 équations en exprimant la solution par rapport aux vitesses des angles d'Euler $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, puis également par rapport aux vitesses de rotation du solide lui-même $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ pour être conforme au capteur MT9-B qui nous fournit ces vitesses-ci.

On rappelle également ici que les vitesses exprimées dans le repère du solide sont :

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\ -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x + \omega_y \sin \phi \tan \theta + \omega_z \cos \phi \tan \theta \\ \omega_y \cos \phi - \omega_z \sin \phi \\ \omega_y \frac{\sin \phi}{\cos \theta} + \omega_z \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix}$$

Dans la suite, on va pour chaque angle développer le modèle d'après ces angles de Cardan, puis les transformations ci-dessus seront utilisées pour obtenir les mêmes équations avec les angles dans le repère du solide.

11.1.1 Roulis

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) \cdot I_{xx}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = (\ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \cos \theta) \cdot I_{xx}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= (\ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \cos \theta \dot{\theta}) \cdot I_{xx} \\ &\quad - I_{yy} \cdot (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta)(-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta) \\ &\quad - I_{zz} \cdot (-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta)(-\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta) \\ &\quad + \int y dm(y) \cdot (-g \cos \phi \cos \theta) \\ &\quad + \int z dm(z) \cdot (+g \sin \phi \cos \theta) \end{aligned}$$

Le développement total en gardant les angles de Cardan donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \ddot{\phi} \cdot I_{xx} \\ &\quad - \ddot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot I_{xx} \\ &\quad - \dot{\psi} \dot{\theta} \cdot \cos \theta (I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz})(2 \cos^2 \phi - 1)) \\ &\quad + \dot{\theta}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi (I_{yy} - I_{zz}) \\ &\quad - \dot{\psi}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos^2 \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\ &\quad + \int y dm(y) \cdot (-g \cos \phi \cos \theta) \\ &\quad + \int z dm(z) \cdot (g \sin \phi \cos \theta) \end{aligned}$$

En passant aux vitesses dans le repère du solide, on a :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) \cdot I_{xx} = \omega_x I_{xx}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = (\ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \cos \theta) \cdot I_{xx} = \dot{\omega}_x I_{xx}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= I_{xx} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \\ &\quad + \int y dm(y) \cdot (-g \cos \phi \cos \theta) \\ &\quad + \int z dm(z) \cdot (+g \sin \phi \cos \theta) \end{aligned}$$

11.1.2 Tangage

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= I_{yy} \cdot (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta) \cdot \cos \phi - I_{zz} \cdot (-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta) \sin \phi \\
&= I_{yy} \cdot (\dot{\theta} \cos^2 \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \phi \cos \theta) - I_{zz} \cdot (-\dot{\theta} \sin^2 \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \phi \cos \theta) \\
&= \dot{\theta} \cdot (I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi) \\
&\quad + \dot{\psi} \sin \phi \cos \phi \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \ddot{\theta} \cdot (I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi) + \dot{\theta} \cdot (-2I_{yy} \cos \phi \sin \phi \dot{\phi} + 2I_{zz} \sin \phi \cos \phi \dot{\phi}) \\
&\quad + \ddot{\psi} \sin \phi \cos \phi \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad + \dot{\psi} \cos 2\phi \dot{\phi} \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) - \dot{\psi} \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \theta \dot{\theta} \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \ddot{\phi} \cdot (I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi) \\
&\quad + \ddot{\psi} \sin \phi \cos \phi \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad + \dot{\theta} \dot{\phi} (\sin 2\phi (I_{zz} - I_{yy})) \\
&\quad + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos 2\phi \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad - \dot{\psi} \dot{\theta} \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \ddot{\theta} \cdot (I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi) \\
&\quad + \ddot{\psi} \sin \phi \cos \phi \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad + \dot{\theta} \dot{\phi} (\sin 2\phi (I_{zz} - I_{yy})) \\
&\quad + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos 2\phi \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad - \dot{\psi} \dot{\theta} \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad + I_{xx} \cdot (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) \dot{\psi} \cos \theta \\
&\quad + I_{yy} \cdot (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta) \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta \\
&\quad + I_{zz} \cdot (-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta) \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta \\
&\quad + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
&\quad - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
&\quad - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = & \ddot{\theta} \cdot (I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi) \\
& + \ddot{\psi} \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) \\
& + \dot{\psi}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta (-I_{xx} + I_{yy} \sin^2 \phi + I_{zz} \cos^2 \phi) \\
& + \dot{\theta} \dot{\phi} \sin 2\phi (I_{zz} - I_{yy}) \\
& + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta (\cos 2\phi \cdot (I_{yy} - I_{zz}) + I_{xx}) \\
& + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
& - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
& - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned}$$

En passant aux vitesses dans le repère du solide :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = & I_{yy} \cos \phi \cdot \omega_y - I_{zz} \sin \phi \cdot \omega_z \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = & -I_{yy} \sin \phi \dot{\phi} \cdot \omega_y + I_{yy} \cos \phi \cdot \dot{\omega}_y - I_{zz} \cos \phi \dot{\phi} \cdot \omega_z - I_{zz} \sin \phi \cdot \dot{\omega}_z \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = & -I_{yy} \sin \phi \dot{\phi} \cdot \omega_y + I_{yy} \cos \phi \cdot \dot{\omega}_y - I_{zz} \cos \phi \dot{\phi} \cdot \omega_z - I_{zz} \sin \phi \cdot \dot{\omega}_z \\
& + I_{xx} \cdot \omega_x \dot{\psi} \cos \theta \\
& + I_{yy} \cdot \omega_y \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta \\
& + I_{zz} \cdot \omega_z \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta \\
& + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
& - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
& - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= I_{yy} \cos \phi \cdot \dot{\omega}_y - I_{zz} \sin \phi \cdot \dot{\omega}_z \\
&+ I_{xx} \cdot \omega_x \dot{\psi} \cos \theta \\
&+ (I_{yy} \cdot \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta - I_{yy} \sin \phi \dot{\phi}) \cdot \omega_y \\
&+ (I_{zz} \cdot \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta - I_{zz} \cos \phi \dot{\phi}) \cdot \omega_z \\
&+ \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
&- \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
&- \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned}$$

Puis en utilisant la relation entre les vitesses des 2 repères :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= I_{yy} \cos \phi \cdot \dot{\omega}_y - I_{zz} \sin \phi \cdot \dot{\omega}_z \\
&+ I_{xx} \cdot \omega_x (\omega_y \sin \phi + \omega_z \cos \phi) \\
&+ \sin \phi (I_{yy} \omega_y \sin \phi \tan \theta + I_{yy} \omega_z \cos \phi \tan \theta \\
&\quad - I_{yy} \omega_x - I_{yy} \omega_y \sin \phi \tan \theta - I_{yy} \omega_z \cos \phi \tan \theta) \cdot \omega_y \\
&+ \cos \phi (I_{zz} \omega_y \sin \phi \tan \theta + I_{zz} \omega_z \cos \phi \tan \theta \\
&\quad - I_{zz} \omega_x - I_{zz} \omega_y \sin \phi \tan \theta - I_{zz} \omega_z \cos \phi \tan \theta) \cdot \omega_z \\
&+ \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
&- \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
&- \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= I_{yy} \cos \phi \cdot \dot{\omega}_y - I_{zz} \sin \phi \cdot \dot{\omega}_z \\
&+ I_{xx} \cdot \omega_x (\omega_y \sin \phi + \omega_z \cos \phi) \\
&- I_{yy} \omega_x \omega_y \sin \phi \\
&- I_{zz} \omega_x \omega_z \cos \phi \\
&+ \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
&- \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
&- \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \dot{\omega}_y \cdot I_{yy} \cos \phi \\
&\quad - \dot{\omega}_z \cdot I_{zz} \sin \phi \\
&\quad - \omega_x \omega_y \sin \phi (I_{yy} - I_{xx}) \\
&\quad - \omega_x \omega_z \cos \phi (I_{zz} - I_{xx}) \\
&\quad + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
&\quad - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
&\quad - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\sin \phi (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy})) \\
&\quad + \cos \phi (\dot{\omega}_y \cdot I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx})) \\
&\quad + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
&\quad - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
&\quad - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned}$$

Approximation des petits angles :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_{yy} \dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_x \omega_z$$

11.1.3 Lacet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= -I_{xx} \cdot \sin \theta (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) \\
&\quad + I_{yy} \cdot \sin \phi \cos \theta (\dot{\theta} \cdot \cos \phi + \dot{\psi} \cdot \sin \phi \cos \theta) \\
&\quad + I_{zz} \cdot \cos \phi \cos \theta (-\dot{\theta} \cdot \sin \phi + \dot{\psi} \cdot \cos \phi \cos \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \ddot{\psi} \cdot (\cos^2 \theta (I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta I_{xx}) \\
&\quad - \ddot{\phi} \cdot \sin \theta I_{xx} \\
&\quad + \ddot{\theta} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad + \dot{\theta} \dot{\psi} \cdot \sin 2\theta (I_{xx} - I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi) \\
&\quad - \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot \sin 2\phi \cos^2 \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad + \dot{\theta} \dot{\phi} \cdot \cos \theta (I_{xx} + (2 \cos^2 \phi - 1)(I_{yy} - I_{zz})) \\
&\quad - \dot{\theta}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \theta (I_{yy} - I_{zz})
\end{aligned}$$

En passant aux angles dans le repère du solide :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = -I_{xx}\omega_x \sin \theta + I_{yy}\omega_y \sin \phi \cos \theta + I_{zz}\omega_z \cos \phi \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= -I_{xx}\dot{\omega}_x \sin \theta - I_{xx}\omega_x \cos \theta \dot{\theta} \\ &\quad + I_{yy}\dot{\omega}_y \sin \phi \cos \theta + I_{yy}\omega_y \cos \phi \dot{\phi} \cos \theta - I_{yy}\omega_y \sin \phi \sin \theta \dot{\theta} \\ &\quad + I_{zz}\dot{\omega}_z \cos \phi \cos \theta - I_{zz}\omega_z \sin \phi \dot{\phi} \cos \theta - I_{zz}\omega_z \cos \phi \sin \theta \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= -I_{xx}\dot{\omega}_x \sin \theta + I_{yy}\dot{\omega}_y \sin \phi \cos \theta + I_{zz}\dot{\omega}_z \cos \phi \cos \theta \\ &\quad - I_{xx}\omega_x \cos \theta \dot{\theta} \\ &\quad + I_{yy}\omega_y (\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta}) \\ &\quad - I_{zz}\omega_z (\sin \phi \cos \theta \dot{\phi} + \cos \phi \sin \theta \dot{\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= -I_{xx}\dot{\omega}_x \sin \theta + I_{yy}\dot{\omega}_y \sin \phi \cos \theta + I_{zz}\dot{\omega}_z \cos \phi \cos \theta \\ &\quad - I_{xx}\omega_x \cos \theta (\omega_y \cos \phi - \omega_z \sin \phi) \\ &\quad + I_{yy}\omega_y (\cos \phi \cos \theta \omega_x + \omega_y \sin \phi \cos \phi \sin \theta \\ &\quad \quad + \omega_z \cos \phi \cos \phi \sin \theta - \sin \phi \sin \theta \omega_y \cos \phi + \sin \phi \sin \theta \omega_z \sin \phi) \\ &\quad - I_{zz}\omega_z (\sin \phi \cos \theta \omega_x + \omega_y \sin \phi \sin \phi \sin \theta \\ &\quad \quad + \omega_z \sin \phi \cos \phi \sin \theta + \cos \phi \sin \theta \omega_y \cos \phi - \cos \phi \sin \theta \omega_z \sin \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= -I_{xx}\dot{\omega}_x \sin \theta + I_{yy}\dot{\omega}_y \sin \phi \cos \theta + I_{zz}\dot{\omega}_z \cos \phi \cos \theta \\ &\quad - I_{xx}\omega_x \cos \theta (\omega_y \cos \phi - \omega_z \sin \phi) \\ &\quad + I_{yy}\omega_y (\omega_x \cos \phi \cos \theta + \omega_z \sin \theta) \\ &\quad - I_{zz}\omega_z (\omega_x \sin \phi \cos \theta + \omega_y \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= -\dot{\omega}_x \sin \theta I_{xx} \\ &\quad + \dot{\omega}_y \sin \phi \cos \theta I_{yy} \\ &\quad + \dot{\omega}_z \cos \phi \cos \theta I_{zz} \\ &\quad + \omega_x \omega_y \cos \phi \cos \theta (I_{yy} - I_{xx}) \\ &\quad + \omega_x \omega_z \sin \phi \cos \theta (I_{xx} - I_{zz}) \\ &\quad + \omega_y \omega_z \sin \theta (I_{yy} - I_{zz}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = & -\sin \theta \cdot (\dot{\omega}_x I_{xx} - \omega_y \omega_z (I_{yy} - I_{zz})) \\
& + \sin \phi \cos \theta \cdot (\dot{\omega}_y I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx})) \\
& + \cos \phi \cos \theta \cdot (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy}))
\end{aligned}$$

Approximation des petits angles :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = I_{zz} \cdot \dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy}) \cdot \omega_x \omega_y$$

11.2 Grandeurs des différents effets dynamiques du modèle

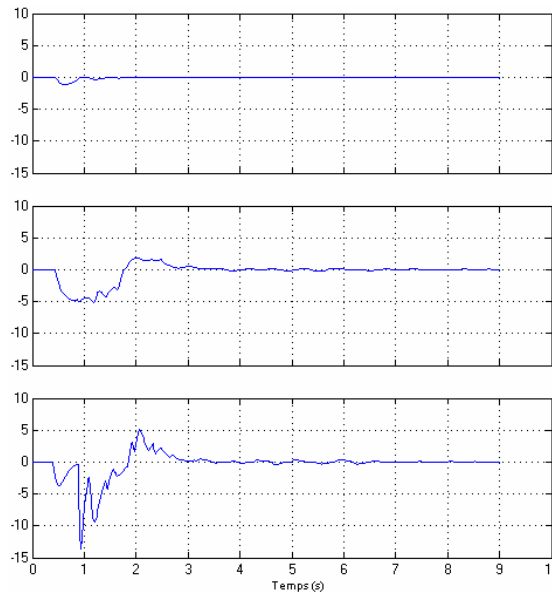
Afin de se rendre compte de l'importance, durant la régulation, des différents termes des trois équations du modèle dynamique de l'hélicoptère, on a représenté ci-dessous leurs valeurs durant la simulation du contrôleur PID de la figure 5.5.

$$\ddot{\psi} = \frac{d(-\Omega_2^2 - \Omega_4^2 + \Omega_1^2 + \Omega_3^2)}{I_{zz}} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} \dot{\phi}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_{rotor} \dot{\theta} (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)}{I_{xx}} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)}{I_{xx}}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{I_{rotor} \dot{\phi} (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4)}{I_{yy}} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_{yy}}$$

Roulis

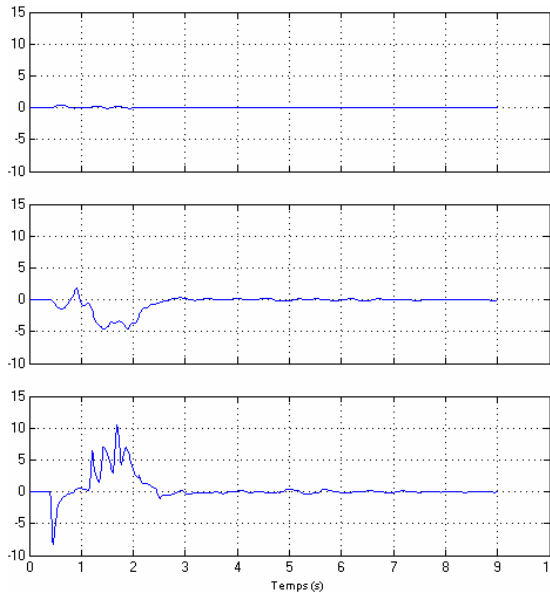


$$\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi} \dot{\theta}$$

$$\frac{I_{rotor} \dot{\theta} (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)}{I_{xx}}$$

$$\frac{bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)}{I_{xx}}$$

Tangage

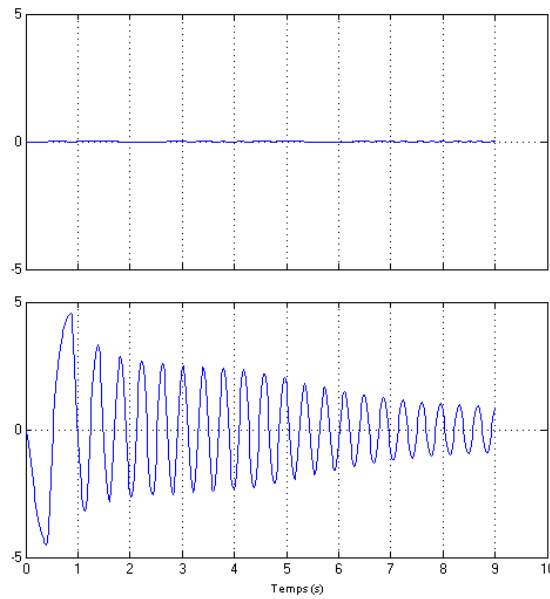


$$\frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi} \dot{\phi}$$

$$\frac{I_{rotor} \dot{\phi} (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4)}{I_{yy}}$$

$$\frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_{yy}}$$

Lacet



$$\frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} \dot{\phi}$$

$$\frac{d(-\Omega_2^2 - \Omega_4^2 + \Omega_1^2 + \Omega_3^2)}{I_{zz}}$$

11.3 Code Matlab de la méthode de Pearson

Régulateur utilisant la méthode de Pearson pour calculer, en fonction du vecteur d'entrée formé des angles et des vitesses angulaires, les consigne moteur minimisant le critère J.

```
function out=control(in)

glob;

x=in(1:6); % State (roll,roll',pitch,pitch',yaw,yaw')

%=== IMPLEMENTATION OF AN OPTIMAL CONTROL :
%=== LQ REGULATOR WITH PEARSON METHOD (dP/dt=0 in RICCATI EQ)
%=====
%=== System:      dX/dt = AX+BU with A,B adaptative
%=== Regulator:  U = -KX      where K=inv(R)B'S
%===
%===== S is solution of the Riccati Equation: 0 = -SA-A'S+SBinv(R)B'-Q

matA=[0,1,0,0,0,0;
      0,0,0,(Iyy-Izz)/(2*Ixx)*x(6),0,(Iyy-Izz)/(2*Ixx)*x(4);
      0,0,0,1,0,0;
      0,(Izz-Ixx)/(2*Iyy)*x(6),0,0,0,(Izz-Iyy)/(2*Iyy)*x(2);
      0,0,0,0,0,1;
      0,(Ixx-Iyy)/(2*Izz)*x(4),0,(Ixx-Iyy)/(2*Izz)*x(2),0,0];

matB=[0,0,0,0,0,0;
      0,L/Ixx,0,0,jr/Ixx*x(4),0;
      0,0,0,0,0,0;
      0,0,L/Iyy,0,-jr/Iyy*x(2),0;
      0,0,0,0,0,0;
      0,0,0,1/Izz,0,0];

matQ=[10,0,0,0,0,0;
      0,1,0,0,0,0;
      0,0,10,0,0,0;
      0,0,0,1,0,0;
      0,0,0,0,10,0;
      0,0,0,0,0,1];

matR=[0.01,0,0,0,0,0;
      0,0.01,0,0,0,0;
      0,0,0.01,0,0,0;
      0,0,0,0.01,0,0;
      0,0,0,0,0.01,0;
      0,0,0,0,0,0.01];

K=LQR(AA,BB,Q,R);
UU=-K*x;
U(1)=UU(1);
U(2)=UU(2);
U(3)=UU(3);
U(4)=UU(4);

A=[b,b,b,b;0,-b,0,b;-b,0,b,0;-d,d,-d,d];
ppp=inv(A)*U';

%Saturation to zero
if(ppp(1)<0)
    ppp(1)=0;
end;
if(ppp(2)<0)
    ppp(2)=0;
end;
if(ppp(3)<0)
    ppp(3)=0;
end;
if(ppp(4)<0)
    ppp(4)=0;
end;
```

```
out=sqrt(ppp);  
  
speed_sat =150;  
  
if(out(1)> speed_sat)  
    out(1)= speed_sat;  
end;  
if(out(2)> speed_sat)  
    out(2)= speed_sat;  
end;  
if(out(3)> speed_sat)  
    out(3)= speed_sat;  
end;  
if(out(4)> speed_sat)  
    out(4)= speed_sat;  
end;
```

11.4 Code Matlab de la méthode de Sage-Eisenberg

Cette fonction effectue le contrôle optimal selon Sage-Eisenberg et simule également la période d'échantillonnage.

```
function out=control(in)

glob;                                     % File containing parameters
x=in(1:6);                               % State (roll,roll',pitch,pitch',yaw,yaw')
time=in(8);                               % Time in second
period=0.01;                             % Sample period
old_out=in(9:12);                        % Previous motor velocities

%=== IMPLEMENTATION OF AN OPTIMAL CONTROL :
%=== LQ REGULATOR WITH SAGE-EISENBERG METHOD (dP/dt!=0 in RICCATI EQ)
%=====
%=== System:      dX/dt = AX+BU with A,B adaptative
%=== Regulator:   U = -KX      where K=inv(R)B'S
%===
%==== S is solution of the Riccati Equation: dS/dt = -SA-A'S+S*Bin(R)B'-Q
%==== that we can rewrite: 0=-S(t)(hA-I)-hA'S(t)+hS(t)Bin(R)B'-(hQ+S(t+1))
%==== because dS/dt=(S(t+1)-S(t))/h
%==== Each step time, assuming S(t=stable_time)=0, we compute S backward
%==== until S(t=0).

if(mod(time,period)==0)

    matA=[0,1,0,0,0,0;
           0,0,0,(Iyy-Izz)/(2*Ixx)*x(6),0,(Iyy-Izz)/(2*Ixx)*x(4);
           0,0,0,1,0,0;
           0,(Izz-Ixx)/(2*Iyy)*x(6),0,0,0,(Izz-Iyy)/(2*Iyy)*x(2);
           0,0,0,0,0,1;
           0,(Ixx-Iyy)/(2*Izz)*x(4),0,(Ixx-Iyy)/(2*Izz)*x(2),0,0];

    matB=[0,0,0,0,0,0;
           0,L/Ixx,0,0,jr/Ixx*x(4),0;
           0,0,0,0,0,0;
           0,0,L/Iyy,0,-jr/Iyy*x(2),0;
           0,0,0,0,0,0;
           0,0,0,1/Izz,0,0];

    matQ=[10,0,0,0,0,0;
           0,1,0,0,0,0;
           0,0,10,0,0,0;
           0,0,0,1,0,0;
           0,0,0,0,10,0;
           0,0,0,0,0,1];

    matR=[0.01,0,0,0,0,0;
           0,0.01,0,0,0,0;
           0,0,0.01,0,0,0;
           0,0,0,0.01,0,0;
           0,0,0,0,0.01,0;
           0,0,0,0,0,0.01];

    S=zeros(6,6);                       % Solution of Riccati Equation
    I=eye(6);                             % Identity matrix
    stable_time=0.3                       % Time to be stable (seconds)
    iterations=10;                       % Number of divisions between 0 and stable_time
    h=stable_time/iterations;            % Period (seconds)

    for i=1:iterations
        T=[h*matA-I,-h*matB*inv(matR)*matB';-h*matQ-S,-h*matA'];
        [V,D]=eig(T);
        M=[];
        for i=1:12
            if real(D(i,i))<0
                M=[M,V(:,i)];
            end;
        end;
        S=real(M(7:12,1:6)*inv(M(1:6,1:6)));
    end;
    K=inv(matR)*matB'*S;

    UU=-K*x;
    U(1)=2.6;
    U(2)=UU(2);
```

```
U(3)=UU(3);
U(4)=UU(4);

A=[b,b,b,b;0,-b,0,b;-b,0,b,0;-d,d,-d,d];
ppp=inv(A)*U';

%Saturation to zero
if(ppp(1)<0)
    ppp(1)=0;
end;
if(ppp(2)<0)
    ppp(2)=0;
end;
if(ppp(3)<0)
    ppp(3)=0;
end;
if(ppp(4)<0)
    ppp(4)=0;
end;

out=sqrt(ppp);

speed_sat=180;

if(out(1)>speed_sat)
    out(1)=speed_sat;
end;
if(out(2)>speed_sat)
    out(2)=speed_sat;
end;
if(out(3)>speed_sat)
    out(3)=speed_sat;
end;
if(out(4)>speed_sat)
    out(4)=speed_sat;
end;
else
    out=old_out;
end;
```