

Bases de la modélisation et de la commande des robots-manipulateurs de type série

PROGRAMME UNIT-GDR ROBOTIQUE

Wisama KHALIL, Etienne DOMBRE

Date de création : 08 mai 2012

Fondation
unit
Université Numérique
Ingénierie et Technologie

GDR
ROBOTIQUE

Bases de la modélisation et de la commande des robots-manipulateurs de type série

Wisama KHALIL¹ et Etienne DOMBRE²

Ce document constitue un support de cours (une vingtaine d'heures) pour des étudiants en Master ou en Ecole d'Ingénieurs qui cherchent à acquérir les bases de la modélisation, de la génération de mouvement et de la commande des robots manipulateurs de type série. Ils trouveront dans [Khalil 02] une présentation plus complète de ces domaines, notamment pour traiter les robots à chaîne complexe et les robots parallèles, pour identifier les paramètres de ces modèles ou pour introduire des schémas de commande en position et en effort avancés.

1. Modélisation

1.1 Introduction

- La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :
- les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (dans lequel est définie la configuration du robot). On distingue :
 - les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement ;
 - les modèles cinématiques direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement ;
 - les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

On présente dans ce chapitre quelques méthodes permettant d'établir ces modèles. On se limitera au cas des robots à structure ouverte simple. Pour les robots à structure complexe, arborescente ou fermée, on renvoie le lecteur à [Khalil 02].

Le formalisme mathématique fait appel aux matrices de transformation homogènes de dimension (4x4). La matrice homogène ${}^i\mathbf{T}_j$ représente la transformation permettant de passer du repère R_i au repère R_j :

$${}^i\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{A}_j & {}^i\mathbf{P}_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{s}_j & {}^i\mathbf{n}_j & {}^i\mathbf{a}_j & {}^i\mathbf{P}_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [1]$$

où ${}^i\mathbf{s}_j$, ${}^i\mathbf{n}_j$ et ${}^i\mathbf{a}_j$ désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes \mathbf{x}_j , \mathbf{y}_j et \mathbf{z}_j du repère R_j exprimés dans le repère R_i , et où ${}^i\mathbf{P}_j$ est le vecteur exprimant l'origine du repère R_j dans le repère R_i . Les vecteurs ${}^i\mathbf{s}_j$, ${}^i\mathbf{n}_j$, ${}^i\mathbf{a}_j$ de la matrice d'orientation ${}^i\mathbf{A}_j$ sont les cosinus directeurs.

1.2. Modélisation géométrique

1.2.1. Description géométrique

La modélisation des robots de façon systématique et automatique exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie. Plusieurs méthodes et notations ont été proposées [Denavit 55], [Sheth 71], [Renaud 75], [Khalil 76], [Borrel 79], [Craig 86]. La plus répandue est celle de Denavit-Hartenberg [Denavit 55]. Mais cette méthode, développée pour des structures ouvertes simples, présente des ambiguïtés lorsqu'elle est appliquée sur des robots ayant des structures fermées ou arborescentes. C'est pourquoi, nous préconisons la

¹ IRCCyN, UMR 6597 CNRS - Ecole Centrale de Nantes

² LIRMM, UMR 5506 CNRS - Université Montpellier 2

notation de Khalil et Kleininger qui permet la description homogène, et avec un nombre minimum de paramètres, des architectures ouvertes simples et complexes de systèmes mécaniques articulés [Khalil 86].

Une structure ouverte simple est composée de $n+1$ corps notés C_0, \dots, C_n et de n articulations. Le corps C_0 désigne la base du robot et le corps C_n le corps qui porte l'organe terminal. L'articulation j connecte le corps C_j au corps C_{j-1} (figure 1). La méthode de description est fondée sur les règles et conventions suivantes :

- _ les corps sont supposés parfaitement rigides. Ils sont connectés par des articulations considérées comme idéales (pas de jeu mécanique, pas d'élasticité), soit rotoïdes, soit prismatiques ;
- le repère R_j est lié au corps C_j ;
- l'axe z_j est porté par l'axe de l'articulation j ;
- l'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_j et z_{j+1} . Si les axes z_j et z_{j+1} sont parallèles ou colinéaires, le choix de x_j n'est pas unique : des considérations de symétrie ou de simplicité permettent alors un choix rationnel.

Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivants (figure 2) :

- α_j : angle entre les axes z_{j-1} et z_j correspondant à une rotation autour de x_{j-1} ;
- d_j : distance entre z_{j-1} et z_j le long de x_{j-1} ;
- θ_j : angle entre les axes x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_j ;
- r_j : distance entre x_{j-1} et x_j le long de z_j .

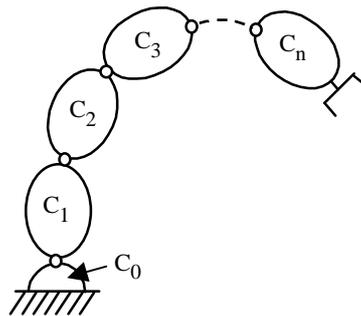


Figure 1. Robot à structure ouverte simple

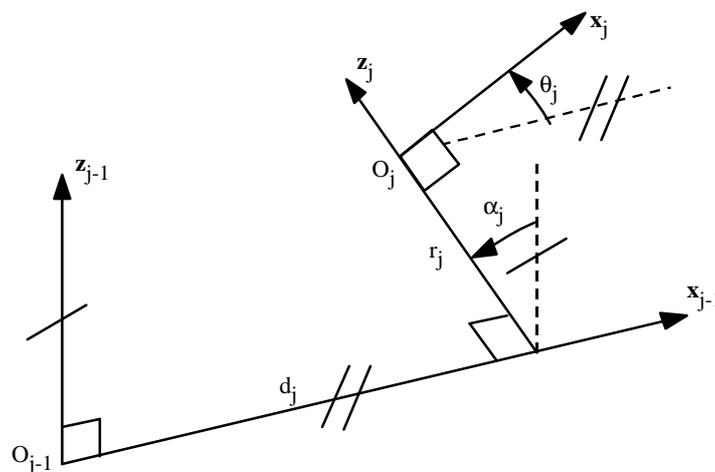


Figure 2. Paramètres géométriques dans le cas d'une structure ouverte simple

La variable articulaire q_j associée à la $j^{\text{ème}}$ articulation est soit θ_j , soit r_j , selon que cette articulation est de type rotoïde ou prismatique, ce qui se traduit par la relation :

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j \quad [2]$$

avec :

- $\sigma_j = 0$ si l'articulation j est rotoïde ;
- $\sigma_j = 1$ si l'articulation j est prismatique ;
- $\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$.

La matrice de transformation définissant le repère R_j dans le repère R_{j-1} est donnée par (figure 2) :

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_j) \mathbf{Trans}(\mathbf{x}, d_j) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta_j) \mathbf{Trans}(\mathbf{z}, r_j)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3]$$

où $\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \alpha)$ et $\mathbf{Trans}(\mathbf{u}, d)$ sont des matrices de transformation homogène (4x4) représentant respectivement une rotation α autour de l'axe \mathbf{u} et une translation d le long de \mathbf{u} .

REMARQUES –

- pour la définition du repère de référence R_0 , le choix le plus simple consiste à prendre R_0 confondu avec le repère R_1 quand $q_1 = 0$, ce qui signifie que \mathbf{z}_0 est confondu avec \mathbf{z}_1 et $\mathbf{O}_0 = \mathbf{O}_1$ lorsque l'articulation 1 est rotoïde, et \mathbf{z}_0 est confondu avec \mathbf{z}_1 et \mathbf{x}_0 est parallèle à \mathbf{x}_1 lorsque l'articulation 1 est prismatique. Ce choix rend les paramètres α_1 et d_1 nuls ;
- de même, on définit l'axe \mathbf{x}_n du repère R_n comme étant colinéaire à \mathbf{x}_{n-1} lorsque $q_n = 0$;
- pour une articulation j prismatique, l'axe \mathbf{z}_j est parallèle à l'axe de l'articulation mais la position de cet axe dans l'espace peut être quelconque : on le place donc de telle sorte que d_j ou d_{j+1} soit nul ;
- lorsque \mathbf{z}_j est parallèle à \mathbf{z}_{j+1} , on place \mathbf{x}_j de telle sorte que r_j ou r_{j+1} soit nul ;
- en pratique, le vecteur des variables articulaires \mathbf{q} est donné par :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_c + \mathbf{q}_0$$

où \mathbf{q}_0 représente un décalage ("offset") et \mathbf{q}_c sont les variables codeurs.

EXEMPLE 1. – Description de la géométrie du robot Stäubli RX-90 (figure 3). La cinématique du porteur est de type anthropomorphe RRR et le poignet comporte trois rotations d'axes concourants, équivalentes à une rotule. D'un point de vue méthodologique, on place d'abord les axes \mathbf{z}_j sur les axes articulaires, puis les axes \mathbf{x}_j selon les règles énoncées précédemment. On détermine ensuite les paramètres géométriques du robot. Le placement des repères est indiqué sur la figure 3 et les paramètres géométriques sont donnés dans le tableau 1.

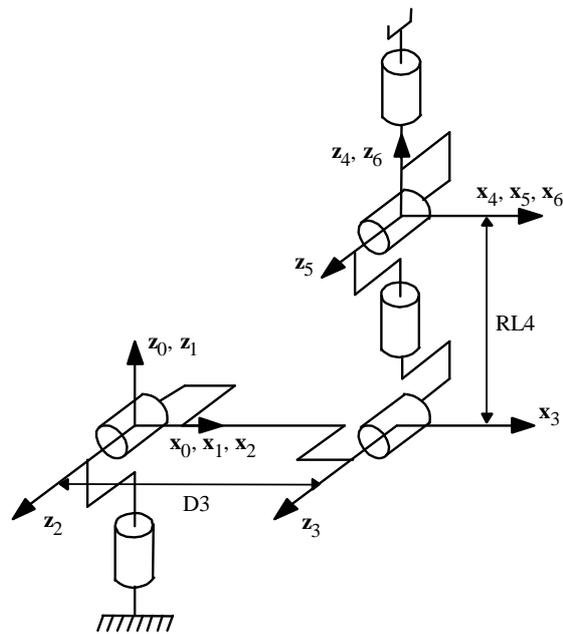


Figure 3. Placement des repères et notations pour le robot Stäubli RX-90

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	0	0	θ_1	0
2	0	$\pi/2$	0	θ_2	0
3	0	0	D3	θ_3	0
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4	RL4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5	0
6	0	$-\pi/2$	0	θ_6	0

Tableau 1. Paramètres géométriques du robot Stäubli RX-90

1.2.2. Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct (MGD) est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, c'est-à-dire les coordonnées opérationnelles du robot, en fonction de ses coordonnées articulaires. Dans le cas d'une chaîne ouverte simple, il peut être représenté par la matrice de transformation ${}^0\mathbf{T}_n$:

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) {}^1\mathbf{T}_2(q_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n(q_n) \quad [4]$$

Le modèle géométrique direct du robot peut aussi être représenté par la relation :

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad [5]$$

\mathbf{q} étant le vecteur des variables articulaires tel que :

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T \quad [6]$$

Les coordonnées opérationnelles sont définies par :

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m]^T \quad [7]$$

Plusieurs possibilités existent pour la définition du vecteur \mathbf{X} . Par exemple, avec les éléments de la matrice ${}^0\mathbf{T}_n$:

$$\mathbf{X} = [P_x \ P_y \ P_z \ s_x \ s_y \ s_z \ n_x \ n_y \ n_z \ a_x \ a_y \ a_z]^T \quad [8]$$

ou bien, sachant que $\mathbf{s} = \mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{a}$:

$$\mathbf{X} = [P_x \ P_y \ P_z \ n_x \ n_y \ n_z \ a_x \ a_y \ a_z]^T \quad [9]$$

Pour les rotations, d'autres représentations sont couramment utilisées comme les angles d'Euler, les angles de Roulis-Tangage-Lacet (RTL) ou les paramètres d'Euler (quaternions). On peut facilement passer des cosinus directeurs \mathbf{s} , \mathbf{n} , \mathbf{a} à l'une quelconque de ces représentations et inversement [Khalil 02].

EXEMPLE 2. – Modèle géométrique direct du robot Stäubli RX-90 (figure 3). A partir du tableau 1, la relation [3] permet d'écrire les matrices de transformation élémentaires ${}^j-1\mathbf{T}_j$. Le produit ${}^0\mathbf{T}_6$ de ces matrices a pour composantes :

$$\begin{aligned} s_x &= C1(C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6) - S1(S4C5C6 + C4S6) \\ s_y &= S1(C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6) + C1(S4C5C6 + C4S6) \\ s_z &= S23(C4C5C6 - S4S6) + C23S5C6 \\ n_x &= C1(-C23(C4C5S6 + S4C6) + S23S5S6) + S1(S4C5S6 - C4C6) \\ n_y &= S1(-C23(C4C5S6 + S4C6) + S23S5S6) - C1(S4C5S6 - C4C6) \\ n_z &= -S23(C4C5S6 + S4C6) - C23S5S6 \\ a_x &= -C1(C23C4S5 + S23C5) + S1S4S5 \\ a_y &= -S1(C23C4S5 + S23C5) - C1S4S5 \\ a_z &= -S23C4S5 + C23C5 \\ P_x &= -C1(S23 RL4 - C2D3) \\ P_y &= -S1(S23 RL4 - C2D3) \\ P_z &= C23 RL4 + S2D3 \end{aligned}$$

avec $C23 = \cos(\theta_2 + \theta_3)$ et $S23 = \sin(\theta_2 + \theta_3)$.

1.2.3. Modèle géométrique inverse

On a vu que le modèle géométrique direct d'un robot permettait de calculer les coordonnées opérationnelles donnant la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires. Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal. Lorsqu'elle existe, la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y a rarement unicité de solution) constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse (MGI). On peut distinguer trois méthodes de calcul du MGI :

- la méthode de Paul [Paul 81] qui traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plupart des robots industriels ;
- la méthode de Pieper [Pieper 68] qui permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté possédant trois articulations rotoïdes d'axes concourants ou trois articulations prismatiques ;
- la méthode générale de Raghavan et Roth [Raghavan 90], donnant la solution générale des robots à six articulations à partir d'un polynôme de degré au plus égal à 16.

Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite du modèle géométrique inverse, on peut calculer une solution particulière par des procédures numériques [Pieper 68], [Whitney 69], [Fournier 80], [Featherstone 83], [Wolovich 84], [Goldenberg 85], [Sciavicco 86]. On ne présente dans ce paragraphe que la méthode de Paul, celles de Pieper et de Raghavan et Roth étant détaillées dans [Khalil 02].

1.2.3.1. Position du problème

Soit ${}^f\mathbf{T}_E^d$ la matrice de transformation homogène représentant la situation désirée du repère outil R_E par rapport au repère atelier R_f . Dans le cas général, on peut exprimer ${}^f\mathbf{T}_E^d$ sous la forme :

$${}^f\mathbf{T}_E^d = \mathbf{Z} {}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) \mathbf{E} \quad [10]$$

expression dans laquelle (figure 4) :

- \mathbf{Z} est la matrice de transformation définissant la situation du robot (repère R_0) dans le repère atelier ;
- ${}^0\mathbf{T}_n$ est la matrice de transformation du repère terminal R_n dans le repère R_0 , fonction du vecteur des variables articulaires \mathbf{q} ;
- \mathbf{E} est la matrice de transformation définissant le repère outil R_E dans le repère terminal R_n .

Lorsque $n \geq 6$, on peut écrire la relation suivante en regroupant dans le membre de droite tous les termes connus :

$${}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = \mathbf{Z}^{-1} {}^f\mathbf{T}_E^d \mathbf{E}^{-1} \quad [11]$$

Lorsque $n < 6$, l'espace opérationnel du robot est de dimension inférieure à six. Il n'est pas possible de faire coïncider le repère outil R_E avec un repère R_E^d décrivant la tâche sauf lorsque les repères R_E et R_E^d sont conditionnés de façon bien particulière pour s'adapter au nombre insuffisant de degrés de liberté. Pratiquement, au lieu d'amener le repère R_E sur le repère R_E^d , on cherchera à faire coïncider entre eux des éléments géométriques liés à ces repères (points, droites).

Dans le calcul du MGI, trois cas se présentent :

- a) absence de solution lorsque la situation désirée est en dehors de la zone accessible du robot. Celle-ci est limitée par le nombre de degrés de liberté, les débattements articulaires et la dimension des segments ;
- b) infinité de solutions lorsque :
 - le robot est redondant vis-à-vis de la tâche ;
 - le robot se trouve dans certaines configurations singulières ;
- c) solutions en nombre fini, exprimées par un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^f\}$. On dit qu'un robot manipulateur est résoluble [Pieper 68], [Roth 76] lorsqu'il est possible de calculer toutes les configurations permettant d'atteindre une situation donnée. Aujourd'hui, tous les manipulateurs série ayant jusqu'à six degrés de liberté et qui ne sont pas redondants peuvent être considérés comme résolubles [Lee 88], [Raghavan 90]. Le nombre de solutions dépend de l'architecture du robot manipulateur.

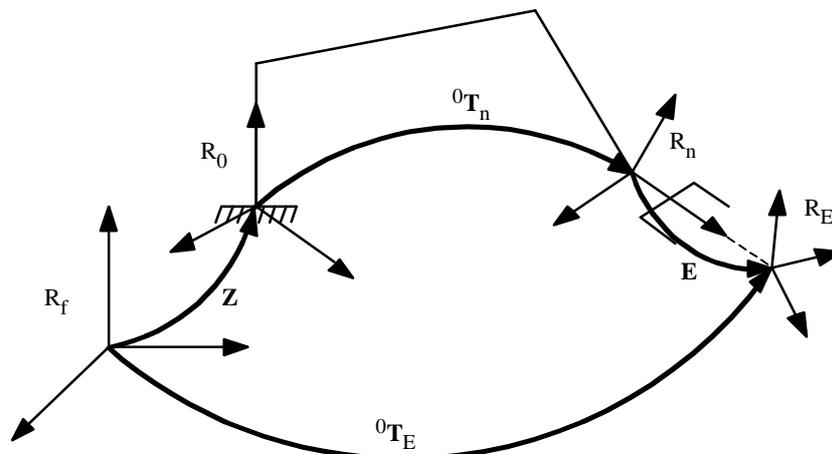


Figure 4. Transformations entre l'organe terminal et le repère atelier

1.2.3.2. Principe de la méthode de Paul

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de transformation homogène a pour expression :

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) {}^1\mathbf{T}_2(q_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n(q_n) \quad [12]$$

Soit \mathbf{U}_0 la situation désirée telle que :

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [13]$$

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$\mathbf{U}_0 = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) {}^1\mathbf{T}_2(q_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n(q_n) \quad [14]$$

Pour trouver les solutions de l'équation [14], Paul [Paul 81] a proposé une méthode qui consiste à prémultiplier successivement les deux membres de l'équation [14] par les matrices ${}^j\mathbf{T}_{j-1}$ pour j variant de 1 à $n-1$, opérations qui permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche. Pour un robot à six degrés de liberté par exemple, on procède comme suit :

– multiplication à gauche de l'expression [14] par ${}^1\mathbf{T}_0$:

$${}^1\mathbf{T}_0 \mathbf{U}_0 = {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \quad [15]$$

Le terme de droite est fonction des variables q_2, \dots, q_6 . Le terme de gauche n'est fonction que des éléments de \mathbf{U}_0 et de la variable q_1 ;

– identification terme à terme des deux membres de l'équation [15]. On se ramène à un système d'une ou de deux équations fonction de q_1 uniquement, dont la structure appartient à un type particulier parmi une dizaine de types possibles ;

– multiplication à gauche de l'expression [15] par ${}^2\mathbf{T}_1$ et calcul de q_2 .

La succession des équations permettant le calcul de tous les q_j est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 &= {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \\ {}^1\mathbf{T}_0 \mathbf{U}_0 &= {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \\ {}^2\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_0 \mathbf{U}_0 &= {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \\ {}^3\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_0 \mathbf{U}_0 &= {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \\ {}^4\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_0 \mathbf{U}_0 &= {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \\ {}^5\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_0 \mathbf{U}_0 &= {}^5\mathbf{T}_6 \end{aligned} \quad [16]$$

les éléments des deuxièmes membres ayant déjà été calculés lors du calcul du MGD :

$$\mathbf{U}_j = {}^j\mathbf{T}_6 = {}^j\mathbf{T}_{j-1} \mathbf{U}_{j-1} \quad [17]$$

L'utilisation de la méthode sur un grand nombre de robots industriels a permis de constater que les types d'équations rencontrés sont peu nombreux et que leur résolution même si elle nécessite parfois quelques développements reste cependant relativement simple [Khalil 02].

REMARQUES –

1) Lorsqu'un robot possède plus de six degrés de liberté, le système à résoudre contient plus d'inconnues que de paramètres décrivant la tâche : il manque $(n-6)$ relations. Deux stratégies sont possibles :

- la première consiste à fixer (n-6) articulations. On se ramène alors au problème à six degrés de liberté. Le choix de ces articulations est dicté par les spécifications de la tâche et par la morphologie du robot. On peut ensuite reconfigurer le robot autour des valeurs obtenues en vue de satisfaire des critères d'optimisation supplémentaires [Chevallereau 88a] ;
- la deuxième stratégie consiste à introduire (n-6) relations supplémentaires décrivant la redondance, comme par exemple dans [Hollerbach 84b] pour des robots à sept degrés de liberté.

2) Lorsque le robot possède moins de six degrés de liberté, il ne peut pas donner à son organe terminal n'importe quelles positions et orientations. Il n'est pas possible d'amener le repère terminal R_E sur un autre repère R_E^d désiré sauf si certains éléments de ${}^0T_E^d$ sont imposés de façon à compenser le nombre insuffisant de degrés de liberté. Sinon, on est amené à réduire le nombre d'équations en ne considérant que certains éléments géométriques liés aux repères R_E et R_E^d .

EXEMPLE 3. – Modèle géométrique inverse du robot Stäubli RX-90. Tous calculs faits, on obtient les solutions suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1 = \text{atan2}(P_y, P_x) \\ \theta'_1 = \theta_1 + \pi \end{cases} \quad [18.1]$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(S2, C2) \quad [18.2]$$

avec :

$$\begin{cases} C2 = \frac{YZ - \varepsilon X \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2} \\ S2 = \frac{XZ + \varepsilon Y \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2} \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

$$X = -2P_z D3$$

$$Y = -2 B1 D3$$

$$Z = (RL4)^2 - (D3)^2 - (P_z)^2 - (B1)^2$$

$$B1 = P_x C1 + P_y S1$$

$$\theta_3 = \text{atan2} \left(\frac{-P_z S2 - B1 C2 + D3}{RL4}, \frac{-B1 S2 + P_z C2}{RL4} \right) \quad [18.3]$$

$$\begin{cases} \theta_4 = \text{atan2}[S1 a_x - C1 a_y, -C23(C1 a_x + S1 a_y) - S23 a_z] \\ \theta'_4 = \theta_4 + \pi \end{cases} \quad [18.4]$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(S5, C5) \quad [18.5]$$

avec :

$$S5 = -C4 [C23 (C1 a_x + S1 a_y) + S23 a_z] + S4 (S1 a_x - C1 a_y)$$

$$C5 = -S23 (C1 a_x + S1 a_y) + C23 a_z$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(S6, C6) \quad [18.6]$$

avec :

$$S6 = -C4 (S1 s_x - C1 s_y) - S4 [C23 (C1 s_x + S1 s_y) + S23 s_z]$$

$$C6 = -C4 (S1 n_x - C1 n_y) - S4 [C23 (C1 n_x + S1 n_y) + S23 n_z]$$

REMARQUES. –

1) Positions singulières

- i) lorsque $P_x = P_y = 0$, ce qui correspond à $S23RL4 - C2D3 = 0$, le point O_4 se trouve sur l'axe z_0 (figure 5a). Les deux arguments utilisés pour le calcul de θ_1 sont nuls et de ce fait, θ_1 est indéterminé. On peut fixer θ_1 à une valeur quelconque, généralement la valeur de la position courante, ou selon des critères d'optimisation comme l'éloignement des butées mécaniques des articulations. Ceci veut dire que l'on peut toujours trouver une solution, mais il se peut alors qu'un petit changement de la situation désirée

demande une variation importante de θ_1 impossible à réaliser compte tenu des limites en vitesse et accélération des actionneurs ;

ii) lorsque $C23(C1a_x+S1a_y)+S23a_z=H_x=0$ et $S1ax-C1ay=H_z=0$, la fonction atan2 utilisée pour calculer θ_4 a ses deux arguments nuls et est donc indéterminée. Cette configuration advient lorsque les axes 4 et 6 sont confondus ($C\theta_5=\pm 1$) et c'est la somme $\theta_4\pm\theta_6$ qui intervient (figure 5b). On peut fixer θ_4 à sa valeur courante, puis on calcule θ_6 en fonction de cette valeur. On peut aussi calculer les valeurs de θ_4 et θ_6 qui éloignent les articulations 4 et 6 de leurs butées ;

iii) une troisième position singulière lorsque $C3=0$ sera mise en évidence avec le modèle cinématique. Cette singularité ne pose pas de problème pour le modèle géométrique inverse (figure 5c).

2) Nombre de solutions : en dehors des singularités, le robot Stäubli RX-90 présente huit configurations théoriques pour le MGI (produit du nombre de solutions possibles sur chaque axe). Certaines de ces configurations peuvent ne pas être accessibles à cause des limites articulaires.

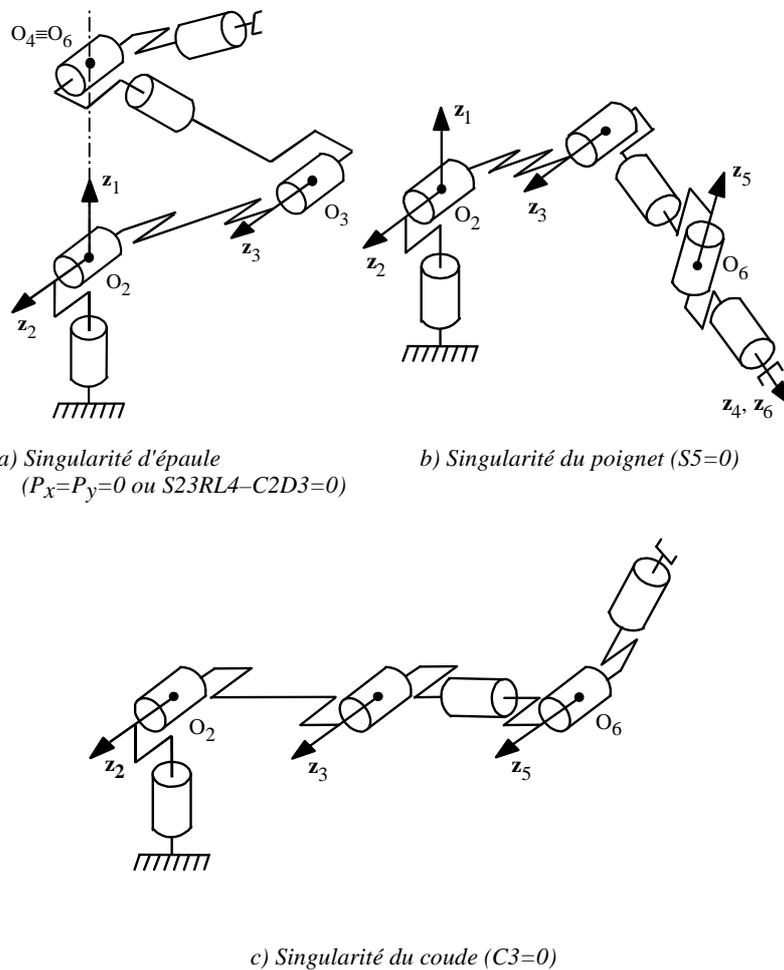


Figure 5. Positions singulières du robot Stäubli RX-90

1.3. Modélisation cinématique

1.3.1. Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires. Il est noté :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad [19]$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ désigne la matrice jacobienne de dimension $(m \times n)$ du mécanisme, égale à $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}}$ et fonction de la configuration articulaire \mathbf{q} . La même matrice jacobienne intervient dans le calcul du modèle différentiel direct qui donne les variations élémentaires $d\mathbf{X}$ des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires $d\mathbf{q}$, soit :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad [20]$$

L'intérêt de la matrice jacobienne est multiple [Whitney 69], [Paul 81] :

- elle est à la base du modèle différentiel inverse, permettant de calculer une solution locale des variables articulaires \mathbf{q} connaissant les coordonnées opérationnelles \mathbf{X} ;
- en statique, on utilise le jacobien pour établir la relation liant les efforts exercés par l'organe terminal sur l'environnement aux forces et couples des actionneurs ;
- elle facilite le calcul des singularités et de la dimension de l'espace opérationnel accessible du robot [Borrel 86], [Wenger 89].

1.3.1.1. Calcul de la matrice jacobienne par dérivation du MGD

Le calcul de la matrice jacobienne peut se faire en dérivant le MGD, $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$, à partir de la relation suivante :

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n \quad [21]$$

où J_{ij} est l'élément (i, j) de la matrice jacobienne \mathbf{J} .

Cette méthode est facile à mettre en œuvre pour des robots à deux ou trois degrés de liberté comme le montre l'exemple suivant. Le calcul de la matrice jacobienne cinématique présenté au § 1.3.1.2 est plus pratique pour les robots ayant plus de trois degrés de liberté.

EXEMPLE 4. – Soit le robot plan à trois degrés de liberté d'axes rotoïdes parallèles représenté sur la figure 6. On note L_1 , L_2 et L_3 les longueurs des segments. On choisit comme coordonnées opérationnelles les coordonnées (P_x, P_y) du point E dans le plan $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ et l'angle α du dernier segment avec l'axe \mathbf{x}_0 .

$$\begin{aligned} P_x &= C_1 L_1 + C_{12} L_2 + C_{123} L_3 \\ P_y &= S_1 L_1 + S_{12} L_2 + S_{123} L_3 \\ \alpha &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{aligned}$$

La matrice jacobienne est calculée en dérivant ces trois relations par rapport à θ_1 , θ_2 et θ_3 :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -S_1 L_1 - S_{12} L_2 - S_{123} L_3 & -S_{12} L_2 - S_{123} L_3 & -S_{123} L_3 \\ C_1 L_1 + C_{12} L_2 + C_{123} L_3 & C_{12} L_2 + C_{123} L_3 & C_{123} L_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.1.2. Matrice jacobienne cinématique

On peut obtenir la matrice jacobienne par une méthode de calcul direct, fondée sur la relation entre les vecteurs des vitesses de translation et de rotation \mathbf{V}_n et $\boldsymbol{\omega}_n$ du repère R_n , et les vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_n \dot{\mathbf{q}} \quad [22]$$

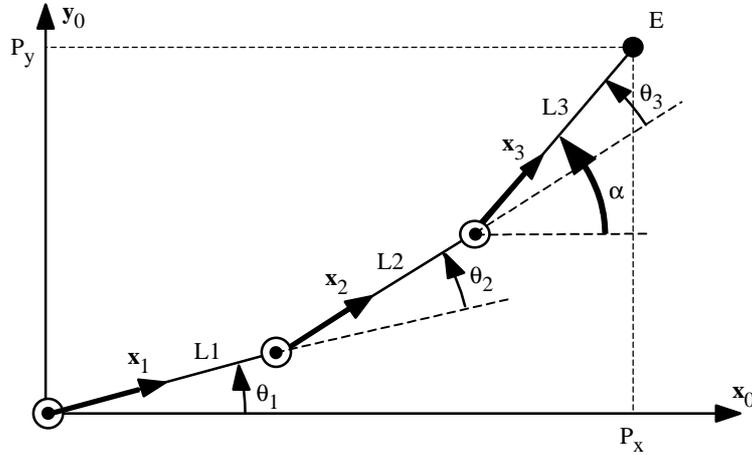


Figure 6. Exemple d'un robot plan à trois degrés de liberté

On note que \mathbf{V}_n est la dérivée par rapport au temps du vecteur \mathbf{P}_n . En revanche, $\boldsymbol{\omega}_n$ n'est pas la dérivée d'une représentation quelconque de l'orientation.

L'expression du jacobien est identique si l'on considère la relation entre les vecteurs de translation et de rotation différentielles ($d\mathbf{P}_n$, $\boldsymbol{\delta}_n$) du repère R_n et les différentielles des coordonnées articulaires $d\mathbf{q}$:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{P}_n \\ \boldsymbol{\delta}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_n d\mathbf{q} \quad [23]$$

i) Calcul du jacobien cinématique

Considérons la $k^{\text{ème}}$ articulation d'une chaîne articulée. La vitesse $\dot{\mathbf{q}}_k$ induit sur le repère terminal R_n la vitesse de translation $\mathbf{V}_{k,n}$ et la vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}_{k,n}$. On rappelle que \mathbf{a}_k est le vecteur unitaire porté par l'axe \mathbf{z}_k de l'articulation k et on désigne par $L_{k,n}$ le vecteur d'origine O_k et d'extrémité O_n . En appliquant le théorème de composition des vitesses, les vitesses de translation et de rotation du repère terminal s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}_{k,n} = \sum_{k=1}^n [\sigma_k \mathbf{a}_k + \bar{\sigma}_k (\mathbf{a}_k \times L_{k,n})] \dot{\mathbf{q}}_k \\ \boldsymbol{\omega}_n = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\omega}_{k,n} = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_k \mathbf{a}_k \dot{\mathbf{q}}_k \end{cases} \quad [24]$$

En mettant ce système sous forme matricielle et en l'identifiant à la relation [22], on déduit que :

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \bar{\sigma}_1 (\mathbf{a}_1 \times L_{1,n}) & \dots & \sigma_n \mathbf{a}_n + \bar{\sigma}_n (\mathbf{a}_n \times L_{n,n}) \\ \bar{\sigma}_1 \mathbf{a}_1 & \dots & \bar{\sigma}_n \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \quad [25]$$

En général, on exprime \mathbf{V}_n et $\boldsymbol{\omega}_n$ soit dans le repère R_n soit dans le repère R_0 . La matrice jacobienne correspondante est notée ${}^n\mathbf{J}_n$ ou ${}^0\mathbf{J}_n$ respectivement. Ces matrices peuvent aussi être calculées en utilisant une matrice ${}^i\mathbf{J}_n$, $i = 0, \dots, n$, grâce à la relation de transformation de la matrice jacobienne entre repères suivante :

$${}^s\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} {}^s\mathbf{A}_i & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & {}^s\mathbf{A}_i \end{bmatrix} {}^i\mathbf{J}_n \quad [26]$$

où ${}^s\mathbf{A}_i$ est la matrice d'orientation, de dimension (3x3), du repère R_i exprimée dans le repère R_s .

La matrice ${}^s\mathbf{J}_n$ peut donc être décomposée en deux matrices, la première étant toujours de rang plein. Les deux matrices ${}^i\mathbf{J}_n$ et ${}^s\mathbf{J}_n$ ayant les mêmes positions singulières, on cherche pratiquement à utiliser le repère de projection R_i qui simplifie les éléments de la matrice ${}^i\mathbf{J}_n$. En général, on obtient la matrice ${}^i\mathbf{J}_n$ la plus simple lorsque l'on prend $i = \lceil \text{partie entière de } n/2 \rceil$.

ii) Calcul de la matrice ${}^i\mathbf{J}_n$

En remarquant que le produit vectoriel $\mathbf{a}_k \times \mathbf{L}_{k,n}$ peut se transformer³ en $\hat{\mathbf{a}}_k \mathbf{L}_{k,n}$, la $k^{\text{ème}}$ colonne de ${}^i\mathbf{J}_n$ notée $\mathbf{j}_{n;k}$ devient :

$$\mathbf{j}_{n;k} = \begin{bmatrix} \sigma_k \mathbf{a}_k + \bar{\sigma}_k \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{a}}_k \mathbf{L}_{k,n} \\ \bar{\sigma}_k \mathbf{a}_k \end{bmatrix} \quad [27]$$

En développant et en notant que $\mathbf{a}_k = [0 \ 0 \ 1]^T$ et que $\mathbf{L}_{k,n} = {}^k\mathbf{P}_n$, on obtient :

$$\mathbf{j}_{n;k} = \begin{bmatrix} \sigma_k \mathbf{a}_k + \bar{\sigma}_k (-{}^kP_{ny} \mathbf{s}_k + {}^kP_{nx} \mathbf{n}_k) \\ \bar{\sigma}_k \mathbf{a}_k \end{bmatrix} \quad [28]$$

où ${}^kP_{nx}$ et ${}^kP_{ny}$ sont respectivement les composantes x et y du vecteur ${}^k\mathbf{P}_n$.

De façon analogue, la $k^{\text{ème}}$ colonne de ${}^i\mathbf{J}_n$ s'écrit également :

$$\mathbf{j}_{n;k} = \begin{bmatrix} \sigma_k \mathbf{a}_k + \bar{\sigma}_k \hat{\mathbf{a}}_k ({}^i\mathbf{P}_n - {}^i\mathbf{P}_k) \\ \bar{\sigma}_k \mathbf{a}_k \end{bmatrix} \quad [29]$$

Lorsque $i = 0$, les éléments de la colonne k donnés par l'équation [29] s'obtiennent à partir de ceux de la matrice ${}^0\mathbf{T}_k$ et du vecteur ${}^0\mathbf{P}_n$. On doit donc calculer les matrices ${}^0\mathbf{T}_k$, $k = 1, \dots, n$.

EXEMPLE 5. – Calcul du jacobien ${}^3\mathbf{J}_6$ du robot Stäubli RX-90. La colonne k de la matrice ${}^3\mathbf{J}_6$ d'un robot manipulateur à six degrés de liberté de type 6R s'écrit :

$${}^3\mathbf{j}_{6;k} = \begin{bmatrix} -{}^kP_{6y} {}^3\mathbf{s}_k + {}^kP_{6x} {}^3\mathbf{n}_k \\ {}^3\mathbf{a}_k \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$${}^3\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} 0 & -RL4+S3D3 & -RL4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C3D3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S23 RL4-C2D3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S23 & 0 & 0 & 0 & S4 & -S5C4 \\ C23 & 0 & 0 & 1 & 0 & C5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & C4 & S5S4 \end{bmatrix}$$

³ La matrice antisymétrique $\hat{\mathbf{a}}$ du *produit vectoriel* est définie par :

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.1.3. Décomposition de la matrice jacobienne en trois matrices

Avec la relation [26], nous avons montré que la matrice ${}^s\mathbf{J}_n$ pouvait être décomposée en deux matrices, la première étant toujours de rang plein et la deuxième contenant des éléments simples. Renaud [Renaud 80b] a montré que l'on peut aussi décomposer la matrice jacobienne en trois matrices : les deux premières sont toujours de rang plein et leur inversion est immédiate ; la troisième est du même rang que ${}^s\mathbf{J}_n$, mais contient des éléments beaucoup plus simples. On obtient [Khalil 02] :

$${}^s\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} {}^s\mathbf{A}_i & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & {}^s\mathbf{A}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -{}^i\hat{\mathbf{L}}_{j,n} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} {}^i\mathbf{J}_{n,j} \quad [30]$$

les éléments de la $k^{\text{ème}}$ colonne de ${}^i\mathbf{J}_{n,j}$ s'expriment dans le repère R_i de la façon suivante :

$${}^i\mathbf{j}_{n,j;k} = \begin{bmatrix} \sigma_k {}^i\mathbf{a}_k + \bar{\sigma}_k (-{}^kP_{jy} {}^i\mathbf{s}_k + {}^kP_{jx} {}^i\mathbf{n}_k) \\ \bar{\sigma}_k {}^i\mathbf{a}_k \end{bmatrix} \quad [31]$$

1.3.1.4. Dimension de l'espace opérationnel d'un robot

Pour une configuration articulaire \mathbf{q} donnée, le rang r de la matrice jacobienne ${}^i\mathbf{J}_n$, notée \mathbf{J} dans la suite pour simplifier les notations, correspond au nombre de degrés de liberté du repère associé à l'organe terminal. Il définit la dimension de l'espace opérationnel accessible dans cette configuration. On appelle nombre de degrés de liberté M de l'espace opérationnel d'un robot, le rang maximal r_{\max} que prend la matrice jacobienne dans toutes les configurations possibles. Deux cas sont à examiner [Gorla 84] :

- si M est égal au nombre de degrés de liberté N du robot (égal à n dans le cas des robots en chaîne simple ou à structure arborescente), le robot est non redondant : il possède juste le nombre d'articulations lui permettant de donner le nombre M de degrés de liberté à son organe terminal ;
- si $N > M$, le robot est redondant d'ordre $(N-M)$. Il dispose de plus d'articulations qu'il n'en faut pour donner le nombre M de degrés de liberté à son organe terminal.

Que ce soit dans l'un ou dans l'autre cas, pour certaines configurations articulaires, il se peut que le rang r soit inférieur à M : on dit que le robot possède une *singularité* d'ordre $(M-r)$. Il perd alors localement la possibilité d'engendrer une vitesse le long ou autour de certaines directions. Lorsque la matrice \mathbf{J} est carrée, les singularités d'ordre un sont solution de $\det(\mathbf{J})=0$ où $\det(\mathbf{J})$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne du robot. Elles sont données par $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)=0$ dans le cas redondant.

On vérifiera à partir des résultats obtenus dans l'exemple 5 que pour le robot manipulateur Stäubli RX-90, le déterminant de ${}^3\mathbf{J}_6$ s'écrit :

$$\det({}^3\mathbf{J}_6) = -C3 D3 RL4 S5 (S23 RL4 - C2 D3)$$

Le rang maximal est tel que $r_{\max}=6$. Le robot est non redondant puisqu'il comporte six degrés de liberté. Cependant, ce rang est égal à cinq dans les trois configurations singulières suivantes (voir figure 5) :

$$\begin{cases} C3 = 0 \\ S23 RL4 - C2 D3 = 0 \\ S5 = 0 \end{cases}$$

1.3.2. Modèle cinématique inverse

L'objectif du modèle cinématique inverse est de calculer, à partir d'une configuration \mathbf{q} donnée, les vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}$ qui assurent au repère terminal une vitesse opérationnelle $\dot{\mathbf{X}}$ imposée. Cette définition est analogue à celle du modèle différentiel inverse : ce dernier permet de déterminer la différentielle articulaire $d\mathbf{q}$ correspondant à une différentielle des coordonnées opérationnelles $d\mathbf{X}$ spécifiée. Pour obtenir le modèle

cinématique inverse, on inverse le modèle cinématique direct en résolvant un système d'équations linéaires. La mise en œuvre peut être faite de façon analytique ou numérique :

- la solution analytique a pour avantage de diminuer considérablement le nombre d'opérations, mais on doit traiter séparément tous les cas singuliers [Chevallereau 87] ;
- les méthodes numériques sont plus générales, la plus répandue étant fondée sur la notion de pseudo-inverse : les algorithmes traitent de façon unifiée les cas réguliers, singuliers et redondants. Elles nécessitent un temps de calcul relativement important.

Nous présentons dans ce paragraphe les techniques à mettre en œuvre pour établir un modèle cinématique inverse dans les cas réguliers, singuliers et redondants.

1.3.2.1. Forme générale du modèle cinématique

Soit $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_p^T \ \mathbf{X}_r^T]^T$ une représentation quelconque dans le repère R_0 de la situation du repère R_n fixé à un solide, les éléments \mathbf{X}_p et \mathbf{X}_r désignant respectivement la position et l'orientation opérationnelles du solide. Les relations entre les vitesses $\dot{\mathbf{X}}_p$ et $\dot{\mathbf{X}}_r$ et les vecteurs vitesses ${}^0\mathbf{V}_n$ et ${}^0\boldsymbol{\omega}_n$ du repère R_n sont telles que :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_p \\ \dot{\mathbf{X}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_p & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \boldsymbol{\Omega}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{V}_n \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{V}_n \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} \quad [32]$$

les matrices $\boldsymbol{\Omega}_p$ et $\boldsymbol{\Omega}_r$ dépendant de la représentation choisie respectivement pour la position et pour l'orientation [Khalil 02].

Partant des équations [22], [30] et [32], le modèle cinématique direct a pour forme générale :

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_p & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \boldsymbol{\Omega}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{A}_i & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & {}^0\mathbf{A}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -i\hat{\mathbf{L}}_{j,n} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} {}^i\mathbf{J}_{n,j} \dot{\mathbf{q}} \quad [33]$$

ou, sous forme condensée :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad [34]$$

1.3.2.2. Modèle cinématique inverse dans le cas régulier

Dans ce cas, la matrice jacobienne \mathbf{J} est carrée d'ordre n et son déterminant est non nul. La méthode la plus générale consiste à calculer \mathbf{J}^{-1} , la matrice inverse de \mathbf{J} , qui permet de déterminer les vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}$ grâce à la relation :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{X}} \quad [35]$$

Lorsque la matrice \mathbf{J} a la forme suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad [36]$$

les matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} étant carrées inversibles, il est facile de montrer que l'inverse de cette matrice s'écrit :

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix} \quad [37]$$

La résolution du problème se ramène donc à l'inversion, beaucoup plus simple, de deux matrices de dimension moindre. Lorsque le robot manipulateur possède six degrés de liberté et un poignet de type rotule, la forme générale de \mathbf{J} est celle de la relation [36], \mathbf{A} et \mathbf{C} étant de dimension (3x3) [Gorla 84].

EXEMPLE 6. – Calcul de la matrice jacobienne inverse du robot manipulateur Stäubli RX-90. Le jacobien ${}^3\mathbf{J}_6$ a été calculé dans l'exemple 5. Le calcul des inverses de \mathbf{A} et de \mathbf{C} donne respectivement :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & V1 \\ 0 & V3 & 0 \\ -1/RL4 & V2V3/RL4 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} V4 & 1 & -V5 \\ S4 & 0 & C4 \\ -C4/S5 & 0 & S4/S5 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} V1 &= \frac{1}{S23RL4 - C2D3} \\ V2 &= -RL4 + S3D3 \\ V3 &= \frac{1}{C3D3} \\ V4 &= C4 \cotg5 \\ V5 &= S4 \cotg5 \end{aligned}$$

En utilisant la formule [37], on obtient :

$${}^3\mathbf{J}_6^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & V1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/RL4 & V2V3/RL4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S4C5V7 & V5V6 & V8 & V4 & 1 & -V5 \\ C4/RL4 & -C4V6 & -S23S4V1 & S4 & 0 & C4 \\ S4V7 & -S4V6/S5 & S23C4V1/S5 & -C4/S5 & 0 & S4/S5 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} V6 &= \frac{S3}{C3RL4} \\ V7 &= \frac{1}{S5RL4} \\ V8 &= (-S23V4 - C23)V1 \end{aligned}$$

1.3.2.3. Solution au voisinage des positions singulières

On a vu que lorsque le robot est non redondant, les singularités d'ordre un sont solution de $\det(\mathbf{J})=0$. Dans le cas redondant, elles sont données par $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)=0$. Les singularités d'ordre supérieur sont déterminées à partir des configurations singulières d'ordre un. Le passage au voisinage d'une position singulière est cependant déterminé de façon plus précise en considérant les valeurs singulières : la décroissance d'une ou plusieurs valeurs singulières est généralement plus significative que celle du déterminant.

En une configuration singulière donnée, le vecteur vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ est constitué en général d'un ensemble de composantes formant un vecteur de l'espace image $I(\mathbf{J})$ de \mathbf{J} , et d'un vecteur orthogonal de composantes dégénérées appartenant à $I(\mathbf{J})^\perp$; il n'existe pas de vitesse articulaire qui puisse engendrer une vitesse opérationnelle suivant cette dernière direction avec le modèle cinématique inverse. Au voisinage des positions singulières, l'utilisation du modèle cinématique inverse classique peut donner des vitesses articulaires importantes, incompatibles avec les caractéristiques des actionneurs.

Pour éviter les singularités, une solution consiste à augmenter le nombre de degrés de liberté du mécanisme [Hollerbach 84b], [Luh 85]. Le robot devient redondant et avec un critère approprié, il est possible de déterminer un mouvement hors singularité. Il existe cependant des singularités inévitables [Baillieul 84] qui doivent être prises en compte par le concepteur de la commande.

Il est courant d'utiliser la pseudo-inverse \mathbf{J}^+ de la matrice \mathbf{J} :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{X}} \quad [38]$$

Cette solution, proposée par Whitney [Whitney 69], [Whitney 72], minimise la norme euclidienne $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ et la norme de l'erreur $\|\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}\|^2$. Dans une configuration singulière, on distingue les deux cas particuliers suivants :

- $\dot{\mathbf{X}}$ appartient uniquement à $I(\mathbf{J})$. Alors, la solution [38] est exacte et l'erreur est nulle bien que l'inverse \mathbf{J}^{-1} ne soit pas définie ;
- $\dot{\mathbf{X}}$ appartient uniquement à $I(\mathbf{J})^\perp$. Alors, la solution [38] donne $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

1.3.2.4. Modèle cinématique inverse des robots redondants

Un robot manipulateur est redondant lorsqu'il possède plus de degrés de liberté N que la dimension de l'espace opérationnel de l'organe terminal M . Il existe donc une infinité de solutions articulaires pour réaliser une tâche donnée. Les modèles géométrique et cinématique inverses ont dans ce cas une infinité de solutions, d'où la possibilité de choisir la solution qui satisfait des contraintes d'optimisation supplémentaires telles que :

- contournement d'obstacles [Maciejewski 85], [Baillieul 86] ;
- évitement des configurations singulières [Yoshikawa 84] ;
- éloignement des butées articulaires [Fournier 80], [Klein 84] ;
- répartition des efforts aux articulations [Baillieul 84], [Hollerbach 85].

Pour un tel mécanisme, la matrice \mathbf{J} est de dimension $(m \times n)$ avec $n > m$, en supposant que les coordonnées articulaires et opérationnelles utilisées soient indépendantes ($n=N$, $m=M$). Plusieurs méthodes de résolution du système [34] sont envisageables. Une solution classique consiste à utiliser une pseudo-inverse avec un terme d'optimisation. La solution générale du système d'équations linéaires [34] s'écrit :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \mathbf{Z} \quad [39]$$

où \mathbf{J}^+ désigne la pseudo-inverse de \mathbf{J} et où \mathbf{Z} représente un vecteur arbitraire de dimension $(n \times 1)$.

Le second terme du membre de droite, appelé solution homogène ou terme d'optimisation, appartient au noyau de \mathbf{J} et n'affecte pas la valeur de $\dot{\mathbf{X}}$. Il peut être utilisé pour satisfaire des contraintes d'optimisation supplémentaires. Soit $\phi(\mathbf{q})$ une fonction scalaire définie positive de l'état \mathbf{q} du mécanisme et soit $\nabla\phi$ le gradient de cette fonction en \mathbf{q} . On montre que le choix de $\mathbf{Z} = \alpha \nabla\phi$ entraîne la décroissance de la fonction $\phi(\mathbf{q})$ pour $\alpha < 0$ et provoque la croissance de cette fonction pour $\alpha > 0$. La solution s'écrit alors :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{X}} + \alpha (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \nabla\phi \quad [40]$$

avec :

$$\nabla\phi = \left[\frac{\partial\phi}{\partial q_1} \quad \dots \quad \frac{\partial\phi}{\partial q_n} \right]^T \quad [41]$$

Le coefficient α permet de trouver un compromis entre les objectifs de minimisation de $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ et d'optimisation de $\phi(\mathbf{q})$. Plusieurs choix sont possibles pour le critère d'optimisation comme l'éloignement des butées ou l'augmentation de la manipulabilité.

Une autre approche consiste à ajouter au vecteur de coordonnées opérationnelles \mathbf{X} un vecteur de $(n-m)$ coordonnées supplémentaires linéairement indépendantes entre elles [Baillieul 85], [Chang 86], [Nenchev 92]. Ces relations peuvent traduire soit des contraintes physiques sur le robot, soit des contraintes liées à son environnement ou tout simplement des relations entre différentes positions articulaires du robot.

1.4. Modélisation dynamique

Le modèle dynamique est la relation entre les couples (et/ou forces) appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires. On représente le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\Gamma = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad [42]$$

avec :

- Γ : vecteur des couples/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique. Dans la suite, on écrira tout simplement *couples* ;
- \mathbf{q} : vecteur des positions articulaires ;
- $\dot{\mathbf{q}}$: vecteur des vitesses articulaires ;
- $\ddot{\mathbf{q}}$: vecteur des accélérations articulaires ;
- \mathbf{f}_e : vecteur représentant l'effort extérieur (forces et moments) qu'exerce le robot sur l'environnement.

On convient d'appeler *modèle dynamique inverse*, ou tout simplement *modèle dynamique*, la relation de la forme [42].

Le *modèle dynamique direct* est celui qui exprime les accélérations articulaires en fonction des positions, vitesses et couples des articulations. Il est alors représenté par la relation :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \Gamma, \mathbf{f}_e) \quad [43]$$

Parmi les applications du modèle dynamique, on peut citer :

- la simulation, qui utilise le modèle dynamique direct ;
- le dimensionnement des actionneurs [Chedmail 90], [Potkonjak 86] ;
- l'identification des paramètres inertiels et des paramètres de frottement du robot [Khalil 02] ;
- la commande, qui utilise le modèle dynamique inverse [Khalil 02].

Plusieurs formalismes ont été utilisés pour obtenir le modèle dynamique des robots [Renaud 75], [Coiffet 81], [Vukobratovic 82]. Les formalismes les plus souvent utilisés sont :

- a) le formalisme de Lagrange [Uicker 69], [Khalil 76], [Renaud 80a], [Hollerbach 80], [Paul 81], [Megahed 84], [Renaud 85] ;
- b) le formalisme de Newton-Euler [Hooker 65], [Armstrong 79], [Luh 80], [Orin 79], [Khalil 85], [Khosla 86], [Khalil 87], [Renaud 87].

On présente dans ce paragraphe ces deux formalismes pour les robots à chaîne ouverte simple (pour les robots à chaîne complexe, voir [Khalil 02]). On y aborde également le problème de la détermination des paramètres inertiels minimaux.

Les principales notations utilisées sont les suivantes :

- \mathbf{a}_j vecteur unitaire suivant l'axe \mathbf{z}_j ;
- \mathbf{F}_j résultante des forces extérieures sur le corps C_j ;
- \mathbf{f}_j résultante du torseur dynamique exercé sur le corps C_j par le corps C_{j-1} ;
- \mathbf{f}_{e_j} résultante du torseur dynamique exercé par le corps C_j sur l'environnement ;
- F_{s_j} paramètre de frottement sec de l'articulation j ;
- F_{v_j} paramètre de frottement visqueux de l'articulation j ;
- \mathbf{g} accélération de la pesanteur ;
- G_j centre de gravité du corps C_j ;
- \mathbf{I}_{G_j} matrice d'inertie du corps C_j par rapport à un repère parallèle à R_j et d'origine G_j ;

- I_a_j moment d'inertie du rotor de l'actionneur j et de son réducteur ressenti par l'articulation ;
- ${}^j\mathbf{J}_j$ matrice d'inertie du corps C_j par rapport au repère R_j , qui s'exprime par :

$${}^j\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} \int(y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int(x^2+z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int(x^2+y^2)dm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j \\ XY_j & YY_j & YZ_j \\ XZ_j & YZ_j & ZZ_j \end{bmatrix} \quad [44]$$

- \mathbf{L}_j vecteur liant l'origine du repère R_{j-1} , antécédent du repère R_j , et l'origine du repère R_j , égal à $\mathbf{O}_{j-1}\mathbf{O}_j$;
- M_j masse du corps C_j ;
- ${}^j\mathbf{MS}_j$ premier moment d'inertie du corps C_j autour de l'origine du repère R_j , égal à $M_j \mathbf{S}_j$. Soit : $[\text{MX}_j \text{MY}_j \text{MZ}_j]^T$ les composantes de ${}^j\mathbf{MS}_j$;
- \mathbf{M}_{G_j} moment des efforts extérieurs exercés sur le corps C_j autour de G_j ;
- \mathbf{M}_j moment des efforts extérieurs exercés sur le corps C_j autour de O_j ;
- \mathbf{m}_j moment du torseur dynamique autour de O_j exercé sur le corps C_j par le corps C_{j-1} ;
- \mathbf{m}_{e_j} moment du torseur dynamique exercé par le corps C_j sur l'environnement autour de O_j ;
- \mathbf{S}_j vecteur ayant pour origine O_j et pour extrémité le centre de masse du corps C_j . Il est égal à $\mathbf{O}_j\mathbf{G}_j$;
- \mathbf{V}_j vitesse du point O_j ;
- $\dot{\mathbf{V}}_j$ accélération du point O_j ;
- \mathbf{V}_{G_j} vitesse du centre de gravité du corps C_j ;
- $\dot{\mathbf{V}}_{G_j}$ accélération du centre de gravité du corps C_j ;
- $\boldsymbol{\omega}_j$ vitesse de rotation du corps C_j ;
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}_j$ accélération de rotation du corps C_j .

1.4.1. Formalisme de Lagrange

Le but de ce paragraphe est d'étudier la forme générale du modèle dynamique, de mettre en évidence les différents termes qui y interviennent et de déduire leurs propriétés caractéristiques. La méthode présentée n'est pas celle qui donne le modèle le plus performant du point de vue du nombre d'opérations, mais c'est la méthode la plus simple compte tenu de ces objectifs. Nous considérerons un robot idéal sans frottement, sans élasticité et ne subissant ou n'exerçant aucun effort extérieur.

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement, lorsque l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul, par l'équation suivante :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad [45]$$

avec :

- L : lagrangien du système égal à $E - U$;
- E : énergie cinétique totale du système ;
- U : énergie potentielle totale du système.

1.4.1.1. Forme générale des équations dynamiques

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \quad [46]$$

où \mathbf{A} est la matrice ($n \times n$) de l'énergie cinétique, d'élément générique A_{ij} , appelée aussi *matrice d'inertie* du robot, qui est symétrique et définie positive. Ses éléments sont fonction des variables articulaires \mathbf{q} .

L'énergie potentielle étant fonction des variables articulaires \mathbf{q} , le couple $\mathbf{\Gamma}$ peut se mettre, à partir des équations [45] et [46], sous la forme :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \quad [47]$$

avec :

• $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$: vecteur de dimension ($n \times 1$) représentant les couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges :

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} \quad [48]$$

• $\mathbf{Q} = [Q_1 \dots Q_n]^T$: vecteur des couples/forces de gravité.

Plusieurs formes sont possibles pour la matrice \mathbf{C} . On peut par exemple calculer ses éléments à partir du *symbole de Christoffel* $c_{i,jk}$ tel que :

$$\begin{cases} C_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{i,jk} \dot{q}_k \\ c_{i,jk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right] \end{cases} \quad [49]$$

Les éléments du vecteur \mathbf{Q} se calculent en écrivant que :

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad [50]$$

Les éléments de \mathbf{A} , \mathbf{C} et \mathbf{Q} sont fonction des paramètres géométriques et inertiels du mécanisme. Les équations dynamiques d'un système mécanique articulé forment donc un système de n équations différentielles du second ordre, couplées et non linéaires.

1.4.1.2. Calcul de l'énergie

L'énergie cinétique du système est donnée par la relation :

$$E = \sum_{j=1}^n E_j \quad [51]$$

où E_j désigne l'énergie cinétique du corps C_j , qui s'exprime par :

$$E_j = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_j^T \mathbf{I}_{G_j} \boldsymbol{\omega}_j + M_j \mathbf{V}_{G_j}^T \mathbf{V}_{G_j}) \quad [52]$$

Etant donné que (figure 7) :

$$\mathbf{V}_{G_j} = \mathbf{V}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{S}_j \quad [53]$$

et sachant que :

$$\mathbf{J}_j = \mathbf{I}_{G_j} - M_j \hat{\mathbf{S}}_j \hat{\mathbf{S}}_j \quad [54]$$

la relation [52] devient :

$$E_j = \frac{1}{2} [(\boldsymbol{\omega}_j^T \mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_j + M_j \mathbf{V}_j^T \mathbf{V}_j + 2 \mathbf{MS}_j^T (\mathbf{V}_j \times \boldsymbol{\omega}_j)] \quad [55]$$

La relation [52] n'est pas linéaire par rapport aux paramètres du vecteur \mathbf{S}_j , contrairement à la relation [55] qui est linéaire vis-à-vis des éléments de M_j , \mathbf{MS}_j et \mathbf{J}_j , appelés *paramètres inertiels standard*. Le calcul de \mathbf{V}_j et de $\boldsymbol{\omega}_j$ se fait par les équations de composition des vitesses (figure 7) :

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j \quad [56]$$

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{j-1} + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \mathbf{L}_j + \sigma_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j \quad [57]$$

Pour un robot dont la base est fixe, les conditions initiales sont telles que $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$.

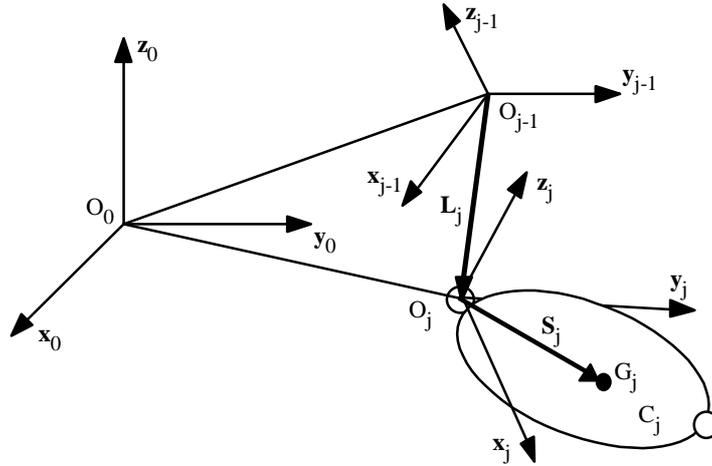


Figure 7. Composition des vitesses

Dans l'équation [55], tous les éléments doivent être exprimés dans le même repère. La façon la plus simple est de les exprimer dans le repère R_j . On réécrit donc les équations [55], [56] et [57] donnant E_j , ${}^j\boldsymbol{\omega}_j$ et ${}^j\mathbf{V}_j$ comme suit :

$$E_j = \frac{1}{2} [{}^j\boldsymbol{\omega}_j^T {}^j\mathbf{J}_j {}^j\boldsymbol{\omega}_j + M_j {}^j\mathbf{V}_j^T {}^j\mathbf{V}_j + 2 {}^j\mathbf{MS}_j^T ({}^j\mathbf{V}_j \times {}^j\boldsymbol{\omega}_j)] \quad [58]$$

$${}^j\boldsymbol{\omega}_j = {}^j\mathbf{A}_{j-1} {}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j\mathbf{a}_j = {}^j\boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j\mathbf{a}_j \quad [59]$$

$${}^j\mathbf{V}_j = {}^j\mathbf{A}_{j-1} ({}^{j-1}\mathbf{V}_{j-1} + {}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times {}^{j-1}\mathbf{P}_j) + \sigma_j \dot{q}_j {}^j\mathbf{a}_j \quad [60]$$

Les termes ${}^j\mathbf{J}_j$ et ${}^j\mathbf{MS}_j$ sont constants. Ils seront notés \mathbf{J}_j et \mathbf{MS}_j pour alléger l'écriture.

L'énergie potentielle s'écrit :

$$U = \sum_{j=1}^n U_j = \sum_{j=1}^n -M_j \mathbf{g}^T (\mathbf{L}_{0,j} + \mathbf{S}_j) \quad [61]$$

$\mathbf{L}_{0,j}$ désignant le vecteur d'origine O_0 et d'extrémité O_j . En projetant les vecteurs de cette relation dans R_0 , on obtient :

$$U_j = -M_j {}^0\mathbf{g}^T ({}^0\mathbf{P}_j + {}^0\mathbf{A}_j {}^j\mathbf{S}_j) \quad [62a]$$

Cette expression peut se mettre sous une forme linéaire en M_j et vis-à-vis des éléments de ${}^j\mathbf{MS}_j$:

$$U_j = -{}^0\mathbf{g}^T (M_j {}^0\mathbf{P}_j + {}^0\mathbf{A}_j {}^j\mathbf{M}\mathbf{S}_j) = -[{}^0\mathbf{g}^T \quad 0] {}^0\mathbf{T}_j \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{M}\mathbf{S}_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad [62b]$$

Les énergies cinétiques et potentielles étant linéaires par rapport aux paramètres inertiels, le modèle dynamique l'est également.

1.4.1.3. Propriétés du modèle dynamique

- la matrice \mathbf{A} est symétrique et définie positive, donc $A_{ij} = A_{ji}$;
- les énergies du corps C_j sont fonction de (q_1, \dots, q_j) et de $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_j)$;
- à partir de la propriété b et de la relation [45], on peut prouver que Γ_i est fonction des paramètres inertiels des corps C_i et des corps aval C_{i+1}, \dots, C_n ;
- on montre que, \mathbf{C} étant défini selon la relation [49], la matrice $[\frac{d}{dt}\mathbf{A} - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$ est antisymétrique [Koditschek 84], [Arimoto 84], ce qui est une propriété intéressante pour la commande ;
- le modèle dynamique est linéaire vis-à-vis des éléments des paramètres inertiels M_j , ${}^j\mathbf{M}\mathbf{S}_j$ et ${}^j\mathbf{J}_j$, appelés paramètres inertiels standard [Ferreira 84]. Cette propriété sera mise à profit pour identifier les paramètres inertiels et diminuer le nombre d'opérations du modèle dynamique.

1.4.1.4. Prise en compte des frottements

De nombreuses études ont été réalisées afin de mieux analyser les frottements au niveau des articulations, des réducteurs et des transmissions. Les frottements non compensés provoquent en effet des erreurs statiques, des retards et des cycles limites [Canudas 90]. Différents modèles de frottement ont été proposés dans la littérature. Citons par exemple les travaux de [Dahl 77], [Canudas 89], [Armstrong 88], [Armstrong 91], [Armstrong 94].

Dans bon nombre d'applications, le modèle du frottement se ramène à un terme constant pour le frottement sec (ou de Coulomb) et un terme fonction de la vitesse pour le frottement visqueux (figure 8). L'expression du couple de frottement Γ_{fi} de l'articulation i s'écrit alors :

$$\Gamma_{fi} = F_{si} \text{sign}(\dot{q}_i) + F_{vi} \dot{q}_i \quad [63]$$

F_{si} et F_{vi} désignant respectivement les paramètres de frottement sec et visqueux et $\text{sign}(\cdot)$ représentant la fonction signe.

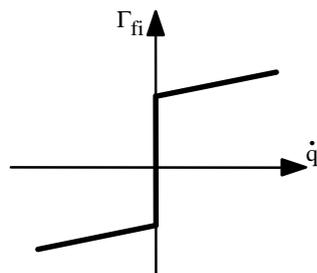


Figure 8. Modèle des frottements

On peut donc tenir compte des forces et couples de frottements en ajoutant au deuxième membre de l'expression [47] le vecteur $\mathbf{\Gamma}_f$ tel que :

$$\mathbf{\Gamma}_f = \mathbf{diag}(\dot{\mathbf{q}})\mathbf{F}_s + \mathbf{diag}(\text{sign}(\dot{\mathbf{q}}))\mathbf{F}_v \quad [64]$$

avec :

- $\mathbf{F}_s = [F_{s1} \quad \dots \quad F_{sn}]^T$
- $\mathbf{F}_v = [F_{v1} \quad \dots \quad F_{vn}]^T$

• **diag(.)** : matrice diagonale de dimension (nxn)

La non-linéarité de ce modèle peut aussi être approchée par un modèle linéaire par morceaux.

1.4.1.5. *Prise en compte des inerties des actionneurs*

On représente l'énergie cinétique du rotor de l'actionneur j par $\frac{1}{2} I_{aj} \dot{q}_j^2$. Le paramètre inertiel I_{aj} peut s'écrire :

$$I_{aj} = N_j^2 J_{mj} \tag{65}$$

où J_{mj} est le moment d'inertie du rotor de l'actionneur j, N_j est le rapport de réduction de l'axe j égal à \dot{q}_{mj} / \dot{q}_j et \dot{q}_{mj} désigne la vitesse du rotor de l'actionneur j.

On en déduit que l'élément A_{jj} de la matrice **A** doit être augmenté de I_{aj} . Cette modélisation des inerties des actionneurs suppose négligeable l'effet gyroscopique de ceux-ci. On trouve des modélisations plus complètes des actionneurs et des transmissions dans [Llibre 83], [Chedmail 86], [Sciavicco 94].

1.4.1.6. *Prise en compte des efforts exercés par l'organe terminal sur son environnement*

Les couples que doivent fournir les actionneurs d'un robot pour que son organe terminal puisse exercer un effort statique f_{en} sur l'environnement s'écrivent :

$$\Gamma_e = J_n^T f_{en} \tag{66}$$

On en tient donc compte en ajoutant le terme Γ_e au deuxième membre de l'expression [47].

EXEMPLE 7. – Trouver les éléments des matrices **A** et **Q** d'un robot à trois degrés de liberté, ayant la même structure que le porteur du robot Stäubli RX-90 décrit dans l'exemple 1. On suppose que :

$${}^jMS_j = [MX_j \quad MY_j \quad MZ_j]^T$$

$${}^jJ_j = \begin{bmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j \\ XY_j & YY_j & YZ_j \\ XZ_j & YZ_j & ZZ_j \end{bmatrix}, \mathbf{I}_a = \begin{bmatrix} I_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{a3} \end{bmatrix}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$A_{11} = I_{a1} + ZZ_1 + SS2 XX_2 + 2CS2 XY_2 + CC2 YY_2 + SS23 XX_3 + 2CS23 XY_3 + CC23 YY_3 + 2C2 C23 D3 MX_3 - 2C2 S23 D3 MY_3 + CC2 D3^2 M_3$$

$$A_{12} = S2 XZ_2 + C2 YZ_2 + S23 XZ_3 + C23 YZ_3 - S2 D3 MZ_3$$

$$A_{13} = S23 XZ_3 + C23 YZ_3$$

$$A_{22} = I_{a2} + ZZ_2 + ZZ_3 + 2C3 D3 MX_3 - 2S3 D3 MY_3 + D3^2 M_3$$

$$A_{23} = ZZ_3 + C3 D3 MX_3 - S3 D3 MY_3$$

$$A_{33} = I_{a3} + ZZ_3$$

avec $SSj = (\sin \theta_j)^2$, $CCj = (\cos \theta_j)^2$ et $CSj = \cos \theta_j \sin \theta_j$. Les éléments de **C** se déduisent de ces expressions grâce à la relation [49].

Pour le calcul des forces de gravité, on suppose que :

$${}^0g = [0 \quad 0 \quad G3]^T$$

L'énergie potentielle est obtenue en utilisant la relation [62] :

$$U = -G3 (MZ_1 + S2MX_2 + C2MY_2 + S23MX_3 + C23MY_3 + D3S2M_3)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0 \\ Q_2 &= -G_3 (C_2 M X_2 - S_2 M Y_2 + C_{23} M X_3 - S_{23} M Y_3 + D_3 C_2 M_3) \\ Q_3 &= -G_3 (C_{23} M X_3 - S_{23} M Y_3) \end{aligned}$$

1.4.2. Formalisme de Newton-Euler

Les équations de Newton-Euler expriment le torseur dynamique en G_j des efforts extérieurs sur un corps j par les équations :

$$\mathbf{F}_j = M_j \dot{\mathbf{V}}_{G_j} \quad [67]$$

$$\mathbf{M}_{G_j} = \mathbf{I}_{G_j} \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{I}_{G_j} \boldsymbol{\omega}_j) \quad [68]$$

La méthode de Luh, Walker et Paul [Luh 80], considérée comme une avancée importante vers la possibilité de calculer en ligne le modèle dynamique des robots, utilise ces équations et est fondée sur une double récurrence. La récurrence avant, de la base du robot vers l'effecteur, calcule successivement les vitesses et accélérations des corps, puis leur torseur dynamique. Une récurrence arrière, de l'effecteur vers la base, permet le calcul des couples des actionneurs en exprimant pour chaque corps le bilan des efforts.

Cette méthode permet d'obtenir directement le modèle dynamique inverse [45] sans avoir à calculer explicitement les matrices \mathbf{A} , \mathbf{C} et \mathbf{Q} . Les paramètres inertiels utilisés sont M_j , \mathbf{S}_j et \mathbf{I}_{G_j} . Le modèle ainsi obtenu n'est pas linéaire par rapport aux paramètres inertiels.

1.4.2.1. Equations de Newton-Euler linéaires par rapport aux paramètres inertiels

Dans ce paragraphe, nous présentons un algorithme de Newton-Euler fondé sur la double récurrence de la méthode de Luh *et al.* [Luh 80], mais exprimant le torseur dynamique des efforts extérieurs en O_j plutôt qu'en G_j , en utilisant les paramètres inertiels M_j , \mathbf{MS}_j et \mathbf{J}_j [Khalil 87], [Khosla 86]. Le modèle ainsi engendré est linéaire par rapport aux paramètres inertiels. Il peut être calculé en utilisant les paramètres inertiels de base en application de la propriété de linéarité.

Les équations de Newton Euler ainsi modifiées s'écrivent :

$$\mathbf{F}_j = M_j \dot{\mathbf{V}}_j + \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times \mathbf{MS}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{MS}_j) \quad [69]$$

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{J}_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_j) + \mathbf{MS}_j \times \dot{\mathbf{V}}_j \quad [70]$$

i) récurrence avant : elle permet de calculer \mathbf{F}_j et \mathbf{M}_j à partir des relations [69] et [70]. Pour ce faire, il faut calculer $\boldsymbol{\omega}_j$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_j$ et $\dot{\mathbf{V}}_j$. Les formules de composition des vitesses sont données par les équations [56] et [57]. Leurs dérivées par rapport au temps s'écrivent :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} + \bar{\sigma}_j (\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \dot{q}_j \mathbf{a}_j) \quad [71]$$

$$\dot{\mathbf{V}}_j = \dot{\mathbf{V}}_{j-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} \times \mathbf{L}_j + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \mathbf{L}_j) + \sigma_j (\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + 2 \boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \dot{q}_j \mathbf{a}_j) \quad [72]$$

On peut finalement calculer \mathbf{F}_j et \mathbf{M}_j grâce aux relations [69] et [70]. On initialise cette récurrence par $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}$ et $\dot{\mathbf{V}}_0 = \mathbf{0}$.

ii) récurrence arrière. Les équations composant la récurrence arrière sont obtenues à partir du bilan des efforts sur chaque corps, écrit à l'origine O_j . On obtient (figure 9) :

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{f}_j - \mathbf{f}_{j+1} + M_j \mathbf{g} - \mathbf{f}_{e_j} \quad [73]$$

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{m}_j - \mathbf{m}_{j+1} - \mathbf{L}_{j+1} \times \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{S}_j \times M_j \mathbf{g} - \mathbf{m}_{e_j} \quad [74]$$

On peut faire intervenir l'effet de la gravité sans avoir à la prendre en compte dans le bilan des efforts. Pour cela, on prend :

$$\dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g} \quad [75]$$

d'où l'on tire les équations suivantes :

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{f}_{ej} \quad [76]$$

$$\mathbf{m}_j = \mathbf{M}_j + \mathbf{m}_{j+1} + \mathbf{L}_{j+1} \times \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{m}_{ej} \quad [77]$$

récurrance initialisée par les efforts $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{0}$.

On obtient alors les couples aux actionneurs Γ_j en projetant, suivant la nature de l'articulation j , les vecteurs \mathbf{f}_j ou \mathbf{m}_j sur l'axe du mouvement. On ajoute les termes correctifs représentant l'effet des frottements et des inerties des actionneurs, ce qui donne :

$$\Gamma_j = (\sigma_j \mathbf{f}_j + \bar{\sigma}_j \mathbf{m}_j)^T \mathbf{a}_j + F_{sj} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{vj} \dot{q}_j + I_{aj} \ddot{q}_j \quad [78]$$

On déduit directement des équations [76] et [77] que les termes \mathbf{f}_j et \mathbf{m}_j ne dépendent que des paramètres inertiels du corps j et de ceux des corps situés en aval qui sont introduits par les termes \mathbf{f}_{j+1} et \mathbf{m}_{j+1} de la récurrence. On retrouve ainsi la propriété (c) énoncée au § 1.4.1.3.

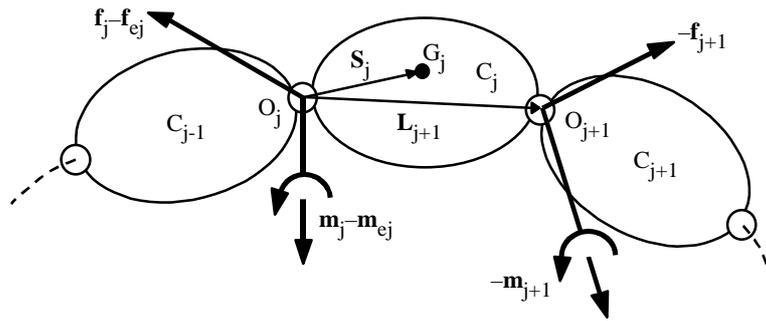


Figure 9. Bilan des efforts au corps j

1.4.2.2. Forme pratique des équations de Newton-Euler

Pour utiliser pratiquement l'algorithme de Newton-Euler exposé ci-dessus, il faut projeter dans un même repère les vecteurs et tenseurs qui apparaissent dans une même équation. Nous reprenons ici le choix de Luh *et al.* [Luh 80] qui consiste à projeter les grandeurs relatives à un corps dans le repère qui lui est lié. Les équations de la récurrence avant deviennent, pour $j = 1, \dots, n$:

$${}^j \boldsymbol{\omega}_{j-1} = {}^j \mathbf{A}_{j-1} {}^{j-1} \boldsymbol{\omega}_{j-1} \quad [79]$$

$${}^j \boldsymbol{\omega}_j = {}^j \boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j \mathbf{a}_j \quad [80]$$

$${}^j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j = {}^j \mathbf{A}_{j-1} {}^{j-1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} + \bar{\sigma}_j (\ddot{q}_j {}^j \mathbf{a}_j + {}^j \boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \dot{q}_j {}^j \mathbf{a}_j) \quad [81]$$

$${}^j \mathbf{U}_j = \hat{{}^j \boldsymbol{\omega}}_j + \hat{{}^j \boldsymbol{\omega}}_j \hat{{}^j \boldsymbol{\omega}}_j \quad [82]$$

$${}^j \dot{\mathbf{V}}_j = {}^j \mathbf{A}_{j-1} ({}^{j-1} \dot{\mathbf{V}}_{j-1} + {}^{j-1} \mathbf{U}_{j-1} {}^{j-1} \mathbf{P}_j) + \sigma_j (\ddot{q}_j {}^j \mathbf{a}_j + 2 {}^j \boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \dot{q}_j {}^j \mathbf{a}_j) \quad [83]$$

$${}^j \mathbf{F}_j = \mathbf{M}_j {}^j \dot{\mathbf{V}}_j + {}^j \mathbf{U}_j {}^j \mathbf{M} \mathbf{S}_j \quad [84]$$

$${}^j \mathbf{M}_j = {}^j \mathbf{J}_j {}^j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + {}^j \boldsymbol{\omega}_j \times ({}^j \mathbf{J}_j {}^j \boldsymbol{\omega}_j) + {}^j \mathbf{M} \mathbf{S}_j \times {}^j \dot{\mathbf{V}}_j \quad [85]$$

avec $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g}$.

Pour la récurrence arrière, lorsque $j = n, \dots, 1$:

$${}^j\mathbf{f}_j = {}^j\mathbf{F}_j + {}^j\mathbf{f}_{j+1} + {}^j\mathbf{f}_{e_j} \quad [86]$$

$${}^{j-1}\mathbf{f}_j = {}^{j-1}\mathbf{A}_j {}^j\mathbf{f}_j \quad [87]$$

$${}^j\mathbf{m}_j = {}^j\mathbf{M}_j + {}^j\mathbf{A}_{j+1} {}^{j+1}\mathbf{m}_{j+1} + {}^j\mathbf{P}_{j+1} \times {}^j\mathbf{f}_{j+1} + {}^j\mathbf{m}_{e_j} \quad [88]$$

$$\Gamma_j = (\sigma_j {}^j\mathbf{f}_j + \bar{\sigma}_j {}^j\mathbf{m}_j)^T {}^j\mathbf{a}_j + F_{s_j} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{v_j} \dot{q}_j + I_{a_j} \ddot{q}_j \quad [89]$$

L'algorithme précédent peut être calculé numériquement. Cependant, pour diminuer de façon sensible le nombre d'opérations, il est préférable de mettre en œuvre une technique de calcul symbolique itératif et d'utiliser les paramètres inertiels de base.

1.5. Conclusion

Le calcul symbolique de ces modèles par ordinateur a fait l'objet d'un grand nombre de travaux [Dillon 73], [Khalil 76], [Zabala 78], [Kreuzer 79], [Aldon 82], [Cesareo 84], [Megahed 84], [Murray 84], [Kircanski 85], [Burdick 86], [Izaguirre 86], [Khalil 89]. On retrouve implantés dans le logiciel SYMORO+ [Khalil 97] tous les algorithmes présentés dans ce chapitre.

2. Génération de mouvement

2.1. Introduction

La génération de mouvements pour un robot désigne la fonction de calcul des consignes désirées (articulaires ou cartésiennes) en fonction du temps afin de réaliser une tâche décrite par une trajectoire composée de positions successives de l'outil du robot (abusivement appelées *points*) et de contraintes cinématiques ou dynamiques. On peut distinguer les classes de mouvements suivants :

- le mouvement entre deux points avec trajectoire libre entre les points ;
- le mouvement entre deux points *via* des points intermédiaires, spécifiés notamment pour éviter les obstacles, avec trajectoire libre entre les points intermédiaires ;
- le mouvement entre deux points avec trajectoire contrainte entre les points (trajectoire rectiligne par exemple) ;
- le mouvement entre deux points *via* des points intermédiaires avec trajectoire contrainte entre les points intermédiaires.

Dans les deux premiers cas, la génération de mouvement peut se faire directement dans l'espace articulaire (figure 10), dans les deux suivants, elle est décrite dans l'espace opérationnel (figure 11). Le fondement mathématique de la génération de mouvements est le calcul d'une ou plusieurs fonctions d'interpolation qui construisent l'équation du mouvement à partir de contraintes spatiales et temporelles.

La génération de mouvement dans l'espace articulaire présente plusieurs avantages :

- elle nécessite moins de calculs en ligne, puisqu'il n'y a pas d'appel au modèle géométrique ou cinématique inverse ;
- le mouvement n'est pas affecté par le passage sur les configurations singulières ;
- les contraintes de vitesses et de couples maximaux sont directement déduites des limites physiques des actionneurs.

En contrepartie, la géométrie de la trajectoire de l'outil dans l'espace opérationnel est imprévisible. Ce type de mouvement est par conséquent approprié pour réaliser des déplacements rapides dans un espace dégagé. La génération de mouvement dans l'espace opérationnel permet de contrôler la géométrie de la trajectoire. En revanche :

- elle implique la transformation en coordonnées articulaires de chaque point de la trajectoire ;
- elle peut être mise en échec lorsque la trajectoire calculée passe par une position singulière, ou lorsque la trajectoire impose une reconfiguration du robot ;

– les limites en vitesse et en couple dans l'espace opérationnel varient selon la configuration du robot. On doit alors exprimer ces limites par des valeurs traduisant des performances moyennes, satisfaites quelle que soit la configuration du robot. On impose donc au robot de travailler en deçà de ses capacités réelles.

Le choix d'une méthode de génération de mouvement dépend de l'application considérée. Nous traitons dans la suite de ce chapitre le problème de la génération de mouvement entre deux points spécifiés dans l'un et l'autre espace. On trouvera dans [Khalil 02] comment traiter le problème lorsque des points supplémentaires sont insérés entre ces deux points.

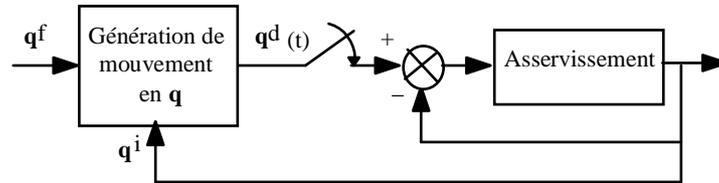


Figure 10. Génération de mouvement dans l'espace articulaire
(les exposants i, f et d désignent respectivement les positions initiales, finales et désirées)

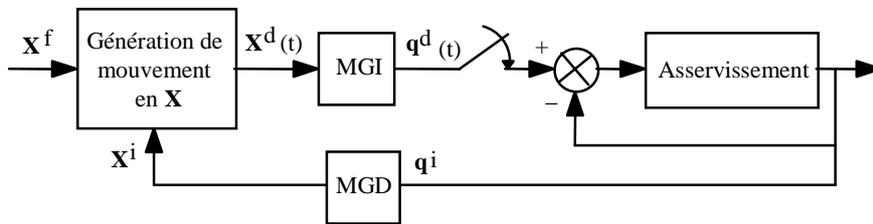


Figure 11. Génération de mouvement dans l'espace opérationnel

2.2. Génération de mouvement entre deux points dans l'espace articulaire

On considère un robot à n degrés de liberté. Soit \mathbf{q}^i et \mathbf{q}^f les vecteurs des coordonnées articulaires correspondant aux configurations initiale et finale. On désigne respectivement par \mathbf{k}_v et \mathbf{k}_a les vecteurs des vitesses et accélérations articulaires maximales. Les paramètres k_{vj} sont généralement calculés de façon exacte à partir des caractéristiques des actionneurs et des rapports de réduction des organes de transmission, tandis que les paramètres k_{aj} sont approchés par le rapport des couples moteurs maximaux aux inerties maximales vues par les articulations (borne supérieure des termes A_{jj} définis dans le modèle dynamique). Une fois calculé le mouvement avec ces contraintes cinématiques, on peut procéder à un changement d'échelle pour satisfaire les contraintes de couple maximum obtenues avec le modèle dynamique [Hollerbach 84a].

Le mouvement entre \mathbf{q}^i et \mathbf{q}^f en fonction du temps t est décrit par l'équation générale suivante :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^i + r(t) \mathbf{D} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_f \quad [90]$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \mathbf{D} \quad [91]$$

avec $\mathbf{D} = \mathbf{q}^f - \mathbf{q}^i$; les valeurs aux limites de la fonction d'interpolation $r(t)$ sont telles que $r(0) = 0$ et $r(t_f) = 1$.

Plusieurs fonctions permettent de satisfaire le passage par \mathbf{q}^i à $t = 0$ et par \mathbf{q}^f à $t = t_f$. Nous étudierons successivement l'interpolation polynomiale de degré cinq, la loi Bang-Bang et la loi trapézoïdale en vitesse.

2.2.1 Interpolation polynomiale de degré cinq

Le recours au calcul polynomial constitue un outil très pratique pour le calcul du mouvement. Les méthodes d'interpolation polynomiale les plus fréquemment rencontrées sont l'interpolation par des polynômes de degré trois et cinq. Nous présentons l'interpolation polynomiale de degré cinq qui assure la continuité du mouvement

en position, vitesse et accélération. On dit alors que le mouvement est de classe C^2 . Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^i, \quad \mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}^f, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_f) = \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{q}}(t_f) = \mathbf{0}$$

et, en utilisant la forme polynomiale suivante :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 + \mathbf{a}_4 t^4 + \mathbf{a}_5 t^5$$

on montre que la fonction de position du degré cinq peut se mettre sous la forme [90] ou [91] avec :

$$r(t) = 10 \left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f}\right)^5 \quad [92]$$

Les évolutions des position, vitesse et accélération pour l'articulation j sont présentées à la figure 12. Les vitesse et accélération maximales ont pour expression :

$$|\dot{q}_{j\max}| = \frac{15 |D_j|}{8 t_f} \quad [93]$$

$$|\ddot{q}_{j\max}| = \frac{10 |D_j|}{\sqrt{3} t_f^2} \quad [94]$$

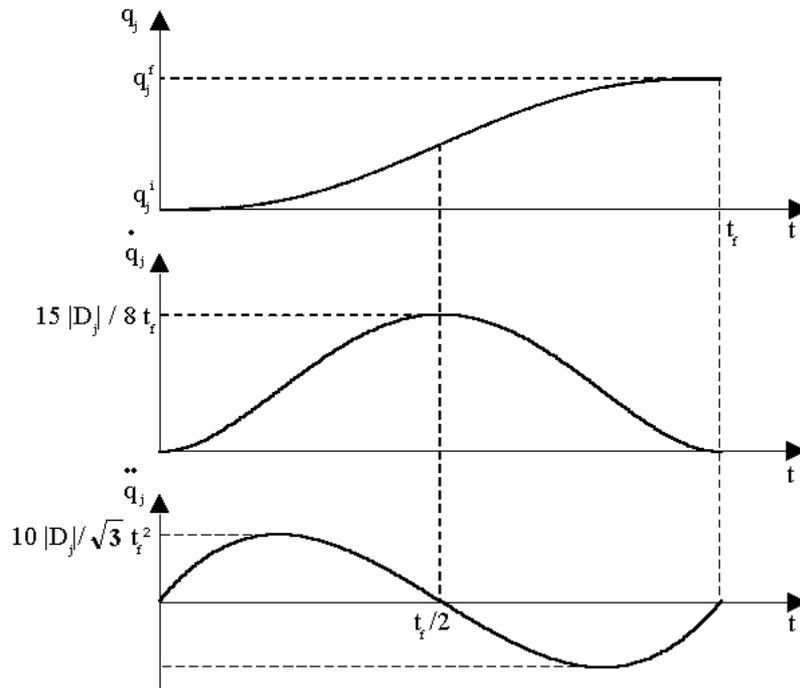


Figure 12. Loi polynomiale de degré cinq

Si la durée t_f du mouvement n'est pas spécifiée, ce qui est généralement le cas, et que l'on recherche le temps minimum pour passer de la configuration \mathbf{q}^i à la configuration \mathbf{q}^f tout en respectant les contraintes de vitesse et d'accélération, on calcule le temps minimum pour chaque articulation séparément puis on effectue la coordination des articulations sur l'articulation contraignante pour laquelle le temps minimum est le plus grand. Le temps minimum pour une articulation j doit saturer la vitesse et/ou l'accélération. A partir des expressions des vitesse et accélération maximales [93] et [94], on déduit que le temps minimum t_{fj} de l'articulation j est donné par :

$$t_{fj} = \max \left[\frac{15 |D_j|}{8 k_{vj}}, \sqrt{\frac{10 |D_j|}{\sqrt{3} k_{aj}}} \right] \quad [95]$$

Le temps global minimum t_f est :

$$t_f = \max (t_{f1}, \dots, t_{fn}) \quad [96]$$

2.2.2. Loi Bang-Bang

Le mouvement est représenté dans ce cas par une phase d'accélération constante jusqu'à $t_f/2$ puis par une phase de freinage constante (figure 13). Les vitesses de départ et d'arrivée sont nulles. Le mouvement est donc continu en position et en vitesse, mais discontinu en accélération.

La position est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^i + 2\left(\frac{t}{t_f}\right)^2 \mathbf{D} & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{t_f}{2} \\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^i + [-1 + 4\left(\frac{t}{t_f}\right) - 2\left(\frac{t}{t_f}\right)^2] \mathbf{D} & \text{pour } \frac{t_f}{2} \leq t \leq t_f \end{cases} \quad [97]$$

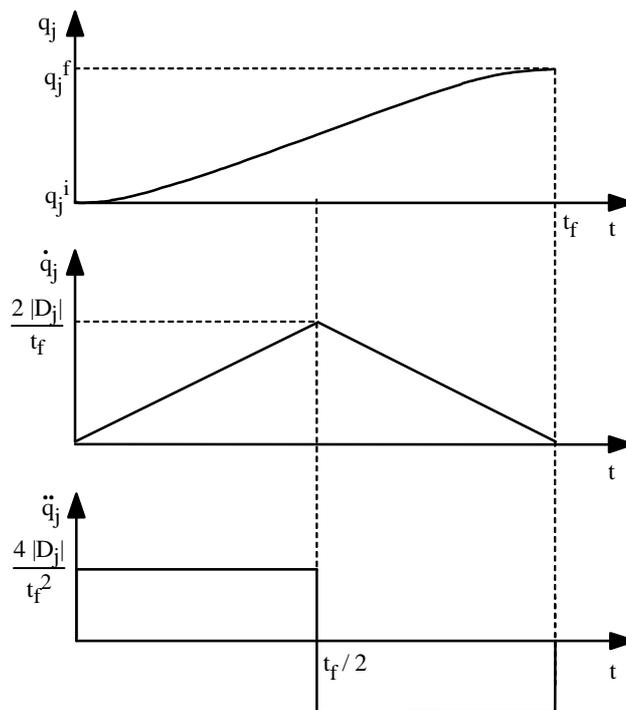


Figure 13. Loi Bang-Bang

Pour une articulation j donnée, les vitesse et accélération maximales ont pour expression :

$$|\dot{q}_{j\max}| = \frac{2 |D_j|}{t_f} \quad [98]$$

$$|\ddot{q}_{j\max}| = \frac{4 |D_j|}{t_f^2} \quad [99]$$

relations à partir desquelles on déduit le temps minimum pour passer de la configuration q_j^i à la configuration q_j^f :

$$t_{fj} = \max \left[\frac{2 |D_j|}{k_{vj}}, 2 \sqrt{\frac{|D_j|}{k_{aj}}} \right] \quad [100]$$

2.2.3. Loi trapézoïdale en vitesse

La loi trapézoïdale en vitesse permet d'engendrer un mouvement continu en vitesse qui assure un temps minimum en saturant à la fois la vitesse et l'accélération (figure 14). La condition d'existence d'un palier de vitesse k_{vj} sur l'articulation j est donnée par:

$$|D_j| > \frac{k_{vj}^2}{k_{aj}} \quad [101]$$

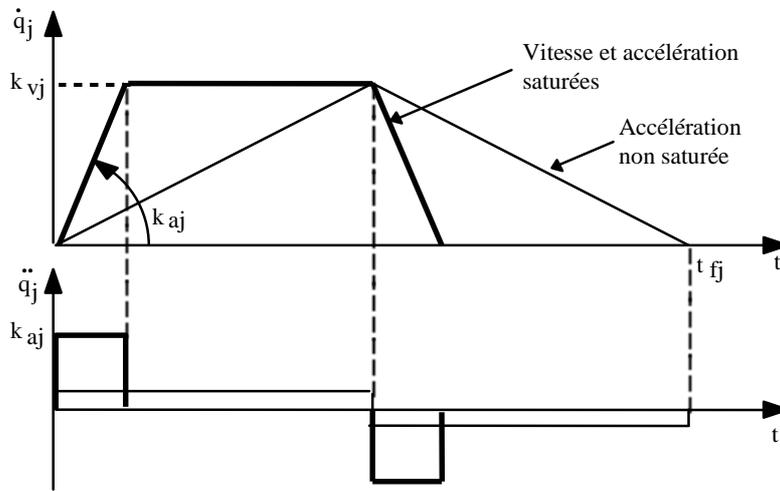


Figure 14. Comparaison de la loi trapèze (en vitesse) avec la loi Bang-Bang

Lorsque la condition [101] n'est pas vérifiée, la vitesse maximale que peut atteindre l'articulation avec une telle loi devient :

$$k_{vj} = \sqrt{|D_j| k_{aj}} \quad [102]$$

Par conséquent pour l'articulation qui ne satisfait pas la condition [101], la vitesse maximale sera calculée par la formule [102].

Le mouvement de l'articulation j (figure 15) est représenté par les relations suivantes :

$$\begin{cases} q_j(t) = q_j^i + \frac{1}{2} t^2 k_{aj} \text{sign}(D_j) & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau_j \\ q_j(t) = q_j^i + (t - \frac{\tau_j}{2}) k_{vj} \text{sign}(D_j) & \text{pour } \tau_j \leq t \leq t_{fj} - \tau_j \\ q_j(t) = q_j^f - \frac{1}{2} (t_{fj} - t)^2 k_{aj} \text{sign}(D_j) & \text{pour } t_{fj} - \tau_j \leq t \leq t_{fj} \end{cases} \quad [103]$$

avec :

$$\tau_j = \frac{k_{vj}}{k_{aj}} \quad [104]$$

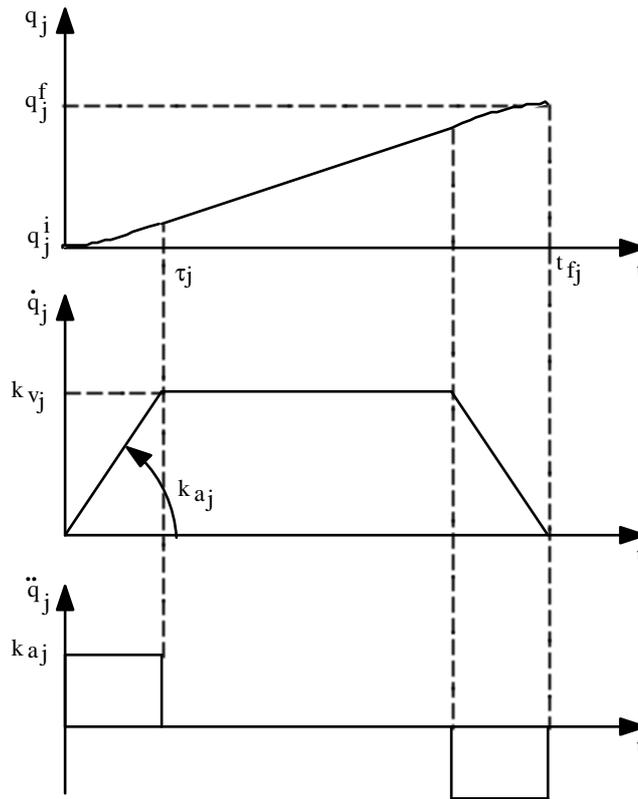


Figure 15. Evolution des position, vitesse et accélération sur l'articulation j avec une loi trapèze

Calcul du temps minimum avec contraintes cinématiques

L'aire du trapèze représentant l'évolution des vitesses est égale à la distance parcourue dans l'intervalle $[0, t_{fj}]$. On peut donc écrire que :

$$|D_j| = |q_j^f - q_j^i| = k_{vj} t_{fj} - \frac{k_{vj}^2}{k_{aj}} \tag{105}$$

On en déduit le temps de parcours minimal pour l'articulation j :

$$t_{fj} = \frac{k_{vj}}{k_{aj}} + \frac{|D_j|}{k_{vj}} = \tau_j + \frac{|D_j|}{k_{vj}} \tag{106}$$

Afin de synchroniser le mouvement des articulations, nous présentons ici une méthode de coordination qui assure des durées d'accélération et de freinage égales sur toutes les articulations. Les lois synchronisées sont donc homothétiques. C'est ce type de loi qui est le plus souvent implanté sur les contrôleurs de robots industriels. Si l'on désigne par α_j le rapport d'homothétie entre la loi de l'articulation j et celle d'une articulation k quelconque, on a la relation (figure 16) :

$$\dot{q}_j(t) = \alpha_j \dot{q}_k(t) \quad \text{pour } j=1, \dots, n \tag{107}$$

Dans ce cas, la durée τ de la phase d'accélération des lois synchronisées n'est *a priori* égale à aucun des τ_j optimaux des lois propres articulaires. Soit $\lambda_j k_{vj}$ la vitesse de la loi synchronisée pour l'articulation j et soit $v_j k_{aj}$ l'accélération correspondante qui produit le mouvement. On désire calculer la valeur de τ qui assure un temps t_f minimum. Etudions d'abord le problème sur deux articulations. D'après la relation [106], les temps de parcours minimaux des articulations calculés séparément s'écrivent :

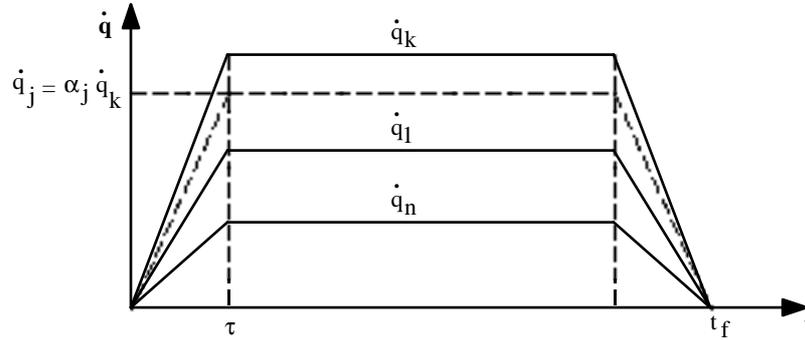


Figure 16. Homothétie des lois de vitesses

$$\begin{cases} t_{f1} = \tau_1 + \frac{|D_1|}{k_{v1}} \\ t_{f2} = \tau_2 + \frac{|D_2|}{k_{v2}} \end{cases} \quad [108]$$

La loi synchronisée est telle que :

$$t_f = \frac{\lambda_1 k_{v1}}{v_1 k_{a1}} + \frac{|D_1|}{\lambda_1 k_{v1}} = \frac{\lambda_2 k_{v2}}{v_2 k_{a2}} + \frac{|D_2|}{\lambda_2 k_{v2}} \quad [109]$$

avec $t_f \geq \max(t_{f1}, t_{f2})$. De l'expression [108], on déduit que :

$$\tau = \frac{\lambda_1 k_{v1}}{v_1 k_{a1}} = \frac{\lambda_2 k_{v2}}{v_2 k_{a2}} \quad [110]$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{k_{v1}|D_2|}{k_{v2}|D_1|} \quad [111]$$

$$v_2 = v_1 \frac{k_{a1}|D_2|}{k_{a2}|D_1|} \quad [112]$$

Pour satisfaire les contraintes de vitesse, il faut que :

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_1 \leq 1 \\ 0 \leq \lambda_2 \leq 1 \end{cases} \quad [113]$$

En utilisant la relation [111], la dernière inégalité devient :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \frac{k_{v2}|D_1|}{k_{v1}|D_2|} \quad [114]$$

Un raisonnement analogue sur les contraintes d'accélération conduit à :

$$\begin{cases} 0 \leq v_1 \leq 1 \\ 0 \leq v_1 \leq \frac{k_{a2}|D_1|}{k_{a1}|D_2|} \end{cases} \quad [115]$$

Le temps t_f minimum est obtenu lorsque les paramètres λ_1 et v_1 sont les plus grands et satisfont simultanément les contraintes ci-dessus, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \min \left[1, \frac{k_{v2}|D_1|}{k_{v1}|D_2|} \right] \\ v_1 = \min \left[1, \frac{k_{a2}|D_1|}{k_{a1}|D_2|} \right] \end{cases} \quad [116]$$

et la durée correspondante de la phase d'accélération vaut :

$$\tau = \frac{\lambda_1 k_{v1}}{v_1 k_{a1}} \quad [117]$$

Ces relations sont facilement généralisables à n articulations :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \min \left[1, \frac{k_{vj}|D_1|}{k_{v1}|D_j|} \right] \\ v_1 = \min \left[1, \frac{k_{aj}|D_1|}{k_{a1}|D_j|} \right] \end{cases} \quad \text{pour } j = 2, \dots, n \quad [118]$$

La relation [118] est valable pour $D_1 \neq 0$ et $D_j \neq 0$. A noter que lorsque $D_j = 0$, l'articulation j ne bouge pas et son mouvement est donné par $\dot{q}_j(t) = 0$, $\ddot{q}_j(t) = 0$.

On remarque que ce mouvement (équations [103]) est représenté par deux polynômes F1 et F3 du second degré et un polynôme F2 du premier degré. Le nombre de paramètres inconnus de ces polynômes est de 8 : 3 pour F1, 2 pour F2 et 3 pour F3. Ces paramètres peuvent être calculés en utilisant les 8 conditions suivantes : $F1(0) = q^i$, $F1(0) = 0$, $F1(\tau) = F2(\tau)$, $F1(\tau) = F2(\tau)$, $F2(t_f - \tau) = F3(t_f - \tau)$, $F2(t_f - \tau) = F3(t_f - \tau)$, $F3(t_f) = q^f$, $F3(t_f) = 0$. Pour chaque couple de valeurs t_f et τ on peut trouver un jeu de paramètres différents. Les formules ci-dessus donnent le temps minimum en respectant les contraintes cinématiques. La relation [102] peut s'écrire en fonction de τ et t_f sous la même forme vectorielle que l'équation générale du mouvement [90] :

$$q(t) = \begin{cases} q^i + D \frac{t^2}{2\tau(t_f - \tau)} & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \\ q^i + D \frac{(2t - \tau)}{2(t_f - \tau)} & \text{pour } \tau \leq t \leq t_f - \tau \\ q^i + D \left[1 - \frac{(t_f - \tau)^2}{2\tau(t_f - t)} \right] & \text{pour } t_f - \tau \leq t \leq t_f \end{cases} \quad [119]$$

2.2.4. Lissage du mouvement trapézoïdal en vitesse

On peut modifier la méthode précédente pour avoir un mouvement continu en accélération en remplaçant les phases d'accélération et de freinage soit par une loi du deuxième degré (figure 17a), soit par une loi trapèze en accélération (figure 17b) [Castain 84]. Pour la première solution, qui est la plus simple à programmer, la loi en position est du quatrième degré. En notant τ la nouvelle durée de l'accélération et en prenant pour la vitesse maximale la valeur $\lambda_j k_{vj}$, on peut écrire les conditions aux limites sur l'articulation j :

$$q_j(0) = q_j^i, \dot{q}_j(0) = 0, \ddot{q}_j(0) = 0, \dot{q}_j(\tau) = \lambda_j k_{vj} \text{sign}(D_j), \ddot{q}_j(\tau) = 0$$

où les valeurs de τ et λ sont en général différentes de celles du mouvement sans lissage.

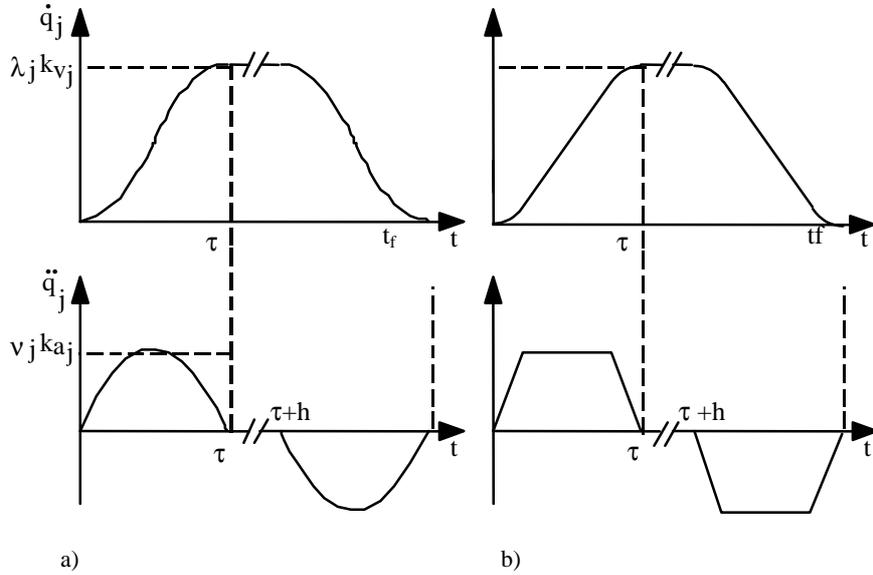


Figure 17. Modification de l'accélération de la loi trapèze pour avoir une accélération continue

On en déduit l'évolution de position, vitesse et accélération de l'articulation j pour $1 \leq j \leq n$ lorsque $0 \leq t \leq \tau$:

$$\begin{cases} q_j(t) = q_j^i - \frac{1}{\tau^3} \lambda_j k_{vj} \text{sign}(D_j) \left(\frac{1}{2} t - \tau\right) t^3 \\ \dot{q}_j(t) = -\frac{1}{\tau^3} \lambda_j k_{vj} \text{sign}(D_j) (2t - 3\tau) t^2 \\ \ddot{q}_j(t) = -\frac{6}{\tau^3} \lambda_j k_{vj} \text{sign}(D_j) (t - \tau) t \end{cases} \quad [120]$$

Pour le palier de vitesse de durée h , l'équation du mouvement s'écrit :

$$q_j(t) = q_j(\tau) + (t - \tau) \lambda_j k_{vj} \text{sign}(D_j) \quad \text{pour } \tau \leq t \leq \tau + h \quad [121]$$

En supposant que les phases d'accélération et de freinage sont symétriques ($t_f = 2\tau + h$), on obtient pour la phase de freinage lorsque $\tau + h \leq t \leq t_f$:

$$\begin{cases} q_j(t) = q_j^f + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t^3} (t-3\tau-h)(t-\tau-h)^3 + (2t+\tau-2t_f) \right] \lambda_j k_{vj} \text{sign}(D_j) \\ \dot{q}_j(t) = \left[\frac{1}{t^3} (2t-\tau-2t_f)(t+\tau-t_f)^2 + 1 \right] \lambda_j k_{vj} \text{sign}(D_j) \\ \ddot{q}_j(t) = \frac{6}{t^3} (t-t_f)(t+\tau-t_f) \lambda_j k_{vj} \text{sign}(D_j) \end{cases} \quad [122]$$

L'accélération maximale a lieu lorsque $t = \tau/2$ et sa valeur peut être obtenue à partir de l'équation [120] par :

$$|\ddot{q}_{j \max}| = \frac{3}{2} \frac{\lambda_j k_{vj}}{\tau} \quad [123]$$

Si l'on prend pour $|\ddot{q}_{j \max}|$ la valeur $v_j k_{aj}$ et en supposant que toutes les articulations ont une durée d'accélération synchronisée telle que :

$$\tau = \frac{3 \lambda_j k_{vj}}{2 \nu_j k_{aj}} \quad [124]$$

D'après les équations [120] et [124], on remarque que la distance parcourue lors de la phase d'accélération est égale à :

$$|q_j^i - q_j(\tau)| = \frac{3 (\lambda_j k_{vj})^2}{4 \nu_j k_{aj}} \quad [125]$$

En calculant l'intégral sous la courbe de vitesse, on vérifie que :

$$t_f = \tau + \frac{|D_j|}{\lambda_j k_{vj}} \quad [126]$$

Cette expression est analogue à l'équation [106] donnant la durée du mouvement dans le cas de la loi trapèze, ce qui suggère que le calcul de λ_j et de ν_j peut s'effectuer selon les relations [118]. A partir de la relation [125] on remarque aussi que pour saturer la vitesse et l'accélération de la loi propre de l'articulation sans synchronisation, la distance à parcourir doit vérifier la condition suivante :

$$|D_j| > \frac{3 k_{vj}^2}{2 k_{aj}} \quad [127]$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, on remplace k_{vj} dans les relations précédentes par la vitesse maximale accessible :

$$k_{vj} = \sqrt{\frac{2}{3} |D_j| k_{aj}} \quad [128]$$

On remarque que pour une distance permettant la même valeur k_{vj} , la durée du temps de l'accélération est 1,5 fois plus grande que dans le cas où l'accélération est constante (loi trapézoïdale non lissée).

De façon similaire à l'équation [119], on peut montrer que le nombre de paramètres pour les trois polynômes représentant ce mouvement est égal à 12. Le nombre d'équations exprimant les conditions aux limites et les conditions de continuité est également égal à 12 : $F1(0) = q^i$, $\dot{F}1(0) = 0$, $\ddot{F}1(0) = 0$, $F1(\tau) = F2(\tau)$, $\dot{F}1(\tau) = \dot{F}2(\tau)$, $\ddot{F}1(\tau) = \ddot{F}2(\tau)$, $F2(t_f - \tau) = F3(t_f - \tau)$, $\dot{F}2(t_f - \tau) = \dot{F}3(t_f - \tau)$, $\ddot{F}2(t_f - \tau) = \ddot{F}3(t_f - \tau)$, $F3(t_f) = q^f$, $\dot{F}3(t_f) = 0$, $\ddot{F}3(t_f) = 0$.

Une fois τ et t_f calculés, le mouvement est donné par le système d'équations vectorielles suivant qui a la même forme que la relation générale [90] :

$$q(t) = \begin{cases} q^i + D \frac{1}{2(t_f - \tau)} \left[\frac{2t^3}{\tau^2} - \frac{t^4}{\tau^3} \right] & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \\ q^i + D \frac{(2t - \tau)}{2(t_f - \tau)} & \text{pour } \tau \leq t \leq t_f - \tau \\ q^i + D \left[1 - \frac{(t_f - \tau)^3}{2(t_f - t)} \frac{(2 - t_f + t)}{\tau^3} \right] & \text{pour } t_f - \tau \leq t \leq t_f \end{cases} \quad [129]$$

2.3. Génération de mouvement entre deux points dans l'espace opérationnel

Soit ${}^0T_E^i$ et ${}^0T_E^f$ les matrices homogènes décrivant respectivement les situations initiale et finale désirées. Pour alléger les notations, on note :

$${}^0\mathbf{T}_E^i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^i & \mathbf{P}^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^0\mathbf{T}_E^f = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^f & \mathbf{P}^f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On recherche une trajectoire rectiligne du point outil. On décompose le mouvement en un mouvement de translation en ligne droite entre les origines de ${}^0\mathbf{T}_E^i$ et ${}^0\mathbf{T}_E^f$ et en un mouvement de rotation α autour d'un axe ${}^E\mathbf{u}$ de l'organe terminal permettant d'aligner \mathbf{A}^i et \mathbf{A}^f . Les deux mouvements se terminent en même temps. La distance à parcourir pour le mouvement de translation est telle que :

$$D = \|\mathbf{P}^f - \mathbf{P}^i\| = \sqrt{(\mathbf{P}_x^f - \mathbf{P}_x^i)^2 + (\mathbf{P}_y^f - \mathbf{P}_y^i)^2 + (\mathbf{P}_z^f - \mathbf{P}_z^i)^2} \quad [130]$$

Le calcul de \mathbf{u} et de α se fait à partir de la relation :

$$\mathbf{A}^i \mathbf{rot}(\mathbf{u}, \alpha) = \mathbf{A}^f \quad [131]$$

où, rappelons-le, $\mathbf{rot}(\mathbf{u}, \alpha)$ désigne la matrice (3x3) de rotation correspondant à une rotation d'un angle α autour d'un vecteur \mathbf{u} . On en tire que :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}, \alpha) = [\mathbf{A}^i]^T \mathbf{A}^f = \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{iT} \\ \mathbf{n}^{iT} \\ \mathbf{a}^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}^f & \mathbf{n}^f & \mathbf{a}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} \quad [132]$$

En utilisant la relation générale de l'opérateur $\mathbf{rot}(\mathbf{u}, \alpha)$, on déduit que :

$$\begin{cases} C\alpha = \frac{1}{2} [s_x + n_y + a_z - 1] \\ S\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{(n_z - a_y)^2 + (a_x - s_z)^2 + (s_y - n_x)^2} \\ \alpha = \text{atan2}(S\alpha, C\alpha) \\ \mathbf{u} = \frac{1}{2S\alpha} \begin{bmatrix} n_z - a_y \\ a_x - s_z \\ s_y - n_x \end{bmatrix} \end{cases} \quad [133]$$

Lorsque $S\alpha$ est petit, on approxime \mathbf{u} par :

$$u_x = \pm \sqrt{\frac{s_x - C\theta}{1 - C\theta}}, \quad u_y = \pm \sqrt{\frac{n_y - C\theta}{1 - C\theta}}, \quad u_z = \pm \sqrt{\frac{a_z - C\theta}{1 - C\theta}} \quad [134]$$

Les signes peuvent être déterminés à partir de l'expression de $\mathbf{rot}(\mathbf{u}, \alpha)$ sachant que $S\alpha$ est toujours positif. Soit k_{v1} et k_{a1} les vitesse et accélération maximales pour les mouvements en translation et soit k_{v2} et k_{a2} les vitesse et accélération maximales pour ceux en rotation. Les méthodes utilisées dans l'espace articulaire peuvent être mises en œuvre pour engendrer le mouvement synchronisé pour les deux variables D et α en temps minimum t_f tout en respectant les contraintes de vitesse et d'accélération. L'évolution de la situation désirée s'écrit :

$${}^0\mathbf{T}_E(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{P}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [135]$$

avec :

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}^i + r(t) (\mathbf{P}^f - \mathbf{P}^i) = \mathbf{P}^i + \frac{s(t)}{D} (\mathbf{P}^f - \mathbf{P}^i) \quad [136]$$

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}^i \mathbf{rot}(\mathbf{u}, r(t) \alpha) \quad [137]$$

où $r(t)$ représente la fonction d'interpolation et $s(t) = D r(t)$ est la distance parcourue à l'instant t .

3. Commande

3.1. Introduction

La commande des robots-manipulateurs a fait l'objet de nombreux travaux. Les principales approches utilisées sont :

- la commande classique de type PID ;
- la commande par découplage non linéaire ;
- la commande passive ;
- la commande fondée sur une fonction de Lyapunov ;
- la commande adaptative ;
- la commande robuste à structure variable (modes glissants).

Il n'est pas possible, dans le cadre de ce cours, de traiter en détail l'ensemble de ces approches. Aussi, après avoir rappelé le principe d'une commande classique de type PID (commande proportionnelle, intégrale et dérivée), on insistera sur la commande par découplage non linéaire, méthode qui est considérée comme la solution théorique idéale pour la commande des robots manipulateurs. Pour une étude plus détaillée de la commande des robots, le lecteur pourra consulter [Spong 89], [Samson 91], [Lewis 93], [Zodiac 96], [Khalil 02].

3.2. Equations du mouvement

Pour alléger les notations, on se limite aux robots à chaîne ouverte simple. Afin de bien appréhender la problématique de la commande des robots-manipulateurs, il est utile de rappeler les équations du modèle dynamique du robot dont la forme générale, pour un robot à n degrés de liberté, est la suivante (§ 1.4.) :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) + \mathbf{diag}(\dot{\mathbf{q}}) \mathbf{F}_v + \mathbf{diag}(\text{sign}(\dot{\mathbf{q}})) \mathbf{F}_s \quad [138]$$

ou, sous une forme plus compacte :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad [139]$$

ou encore, le modèle ayant une forme linéaire par rapport aux paramètres dynamiques :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\chi} \quad [140]$$

On rappelle que $\mathbf{\Gamma}$ est le vecteur ($n \times 1$) des couples/forces articulaires, $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ est la matrice ($n \times n$) d'inertie du robot, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ est le vecteur ($n \times 1$) représentant les forces centrifuges et les forces de Coriolis, $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ est le vecteur des forces de gravité, \mathbf{F}_v et \mathbf{F}_s sont les vecteurs des paramètres de frottement respectivement visqueux et sec, $\boldsymbol{\chi}$ représente le vecteur des paramètres dynamiques (paramètres inertiels et paramètres de frottement).

En supposant que les organes de transmission ne comportent ni jeux ni élasticité, le couple transmis à l'articulation j par un moteur électrique à courant continu ou synchrone commandé en courant s'exprime par :

$$\Gamma_j = N_j K_{aj} K_{Tj} u_j \quad [141]$$

où N_j est le rapport de réduction, K_{aj} est le gain de l'amplificateur, K_{Tj} est la constante de couple du moteur et u_j est le signal d'entrée de l'amplificateur.

La synthèse de la commande consiste à calculer Γ_j , puis à calculer le signal u_j permettant de suivre la consigne désirée.

3.3. Commande classique

3.3.1. Commande PID dans l'espace articulaire

Le modèle dynamique décrit un système de n équations différentielles du second ordre non linéaires et couplées, n étant le nombre d'articulations. Pourtant, dans une commande classique, qui est celle de la plupart des robots industriels actuels, le mécanisme est considéré comme un système linéaire et chacune de ses articulations est asservie par une commande décentralisée de type PID à gains constants. Ses avantages sont la facilité d'implantation et le faible coût en calcul. En contrepartie, la réponse temporelle du robot variant selon sa configuration, on constate des dépassements de consigne et une mauvaise précision de suivi dans les mouvements rapides. Dans beaucoup d'applications, ces inconvénients ne représentent pas un gros handicap. En pratique, une telle commande est réalisée selon le schéma de la figure 18.

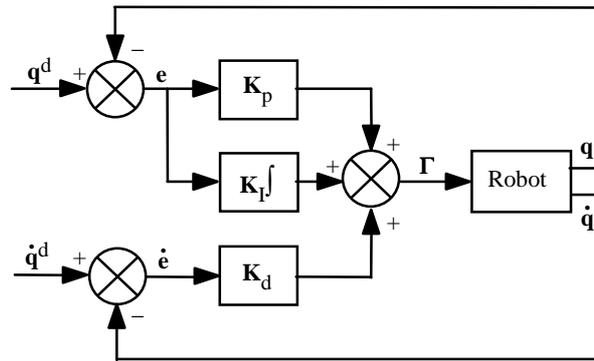


Figure 18. Schéma classique d'une commande PID

La loi de commande est donnée par :

$$\Gamma = \mathbf{K}_p (\mathbf{q}^d - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_d (\dot{\mathbf{q}}^d - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_I \int_{t_0}^t (\mathbf{q}^d - \mathbf{q}) \, dt \quad [142]$$

où $\dot{\mathbf{q}}^d(t)$ et $\mathbf{q}^d(t)$ désignent les vitesse et position désirées dans l'espace articulaire et où \mathbf{K}_p , \mathbf{K}_d et \mathbf{K}_I sont des matrices diagonales définies positives, de dimension $(n \times n)$, dont les éléments génériques sont respectivement les gains proportionnels K_{pj} , dérivés K_{dj} et intégraux K_{Ij} .

Le calcul des gains K_{pj} , K_{dj} et K_{Ij} est effectué en considérant le modèle de l'articulation j représenté par le système linéaire du deuxième ordre à coefficients constants suivant :

$$\Gamma_j = a_j \ddot{q}_j + F_{vj} \dot{q}_j + \gamma_j \quad [143]$$

équation dans laquelle $a_j = A_{jj_{\max}}$ désigne la valeur maximale de l'élément A_{jj} de la matrice d'inertie du robot et γ_j représente un couple perturbateur.

La fonction de transfert en boucle fermée pour $\gamma = 0$ est alors donnée par :

$$\frac{q_j(s)}{q_j^d(s)} = \frac{K_{dj} s^2 + K_{pj} s + K_{Ij}}{a_j s^3 + (K_{dj} + F_{vj}) s^2 + K_{pj} s + K_{Ij}} \quad [144]$$

et l'équation caractéristique s'écrit :

$$\Delta(s) = a_j s^3 + (K_{dj} + F_{vj}) s^2 + K_{pj} s + K_{Ij} \quad [145]$$

La solution la plus courante en robotique consiste à choisir les gains de manière à obtenir un pôle triple réel négatif, ce qui donne une réponse rapide sans oscillations. Par conséquent, l'équation caractéristique se factorise de la façon suivante :

$$\Delta(s) = a_j (s + \omega_j)^3 \quad [146]$$

avec $\omega_j > 0$.

On en déduit pour les gains :

$$\begin{cases} K_{pj} = 3 a_j \omega_j^2 \\ K_{dj} + F_{vj} = 3 a_j \omega_j \\ K_{Ij} = a_j \omega_j^3 \end{cases} \quad [147]$$

REMARQUES.–

- ω_j est choisi le plus grand possible ; toutefois, cette pulsation ne devra pas être supérieure à la pulsation de résonance ω_{rj} correspondant aux modes de vibration mécanique afin de ne pas déstabiliser le système. Une valeur $\omega_j = \omega_{rj} / 2$ représente un bon compromis ;
- en l'absence de terme intégral, une erreur statique due à la force de gravité et aux frottements peut subsister autour de la position finale. En pratique, on désactive la composante intégrale lorsque l'erreur en position est très grande, le terme proportionnel étant suffisant ; on la désactive aussi lorsque l'erreur devient très petite pour éviter les oscillations que pourraient induire les frottements secs ;
- le terme d'anticipation $\mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}}^d$ de l'équation [142] permet de réduire les erreurs de suivi du mouvement désiré. En automatique classique, ce terme n'est pas couramment utilisé ;
- les performances d'une telle méthode sont d'autant plus acceptables que le rapport de réduction est important (augmentant ainsi la partie invariante de A_{jj}), que les vitesses sont faibles et que les gains proportionnels et dérivés sont grands [Samson 83].

Lorsque les effets de la gravité sont compensés, par construction mécanique comme pour le robot SCARA par exemple ou grâce à la commande, on montre qu'une loi de type PD est asymptotiquement stable pour une position désirée \mathbf{q}^d fixe [Arimoto 84]. La démonstration s'appuie sur la définition d'une fonction de Lyapunov ayant la forme suivante :

$$V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} \quad [148]$$

où \mathbf{e} désigne l'erreur de consigne :

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}^d - \mathbf{q} \quad [149]$$

Puisque \mathbf{q}^d est constant, alors la loi de commande PD est égale à :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \quad [150]$$

A partir des équations [138] et [150], on obtient en négligeant les frottements :

$$\mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \quad [151]$$

En dérivant la fonction V [148], on trouve :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{q}} \quad [152]$$

et, après substitution de $\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}}$ par sa valeur à partir de l'équation [151], on obtient :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{A}} - 2\mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \quad [153]$$

La matrice $(\dot{\mathbf{A}} - 2\mathbf{C})$ étant antisymétrique [Koditschek 84], [Arimoto 83], le terme $\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{A}} - 2\mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}}$ est nul. On en conclut que :

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \leq 0$$

Cette expression montre que V diminue tant que $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$, ce qui n'est pas suffisant pour démontrer la stabilité asymptotique. En effet, on doit s'assurer que lorsque $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ le robot n'atteint pas une configuration dans laquelle $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}^d$. Pour montrer que ce n'est pas le cas, on utilise le principe d'invariance de La Salle [Hahn 67] (Annexe 9). Pour que $\dot{V} = 0$, il faut nécessairement que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ et par conséquent que $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. A partir de l'équation du mouvement [151] on obtient alors que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. L'équilibre ($\mathbf{e} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) est donc l'ensemble invariant le plus grand inclus dans \dot{V} et on en déduit que la stabilité est asymptotique au point d'équilibre.

Il a été démontré que la stabilité du système est assurée si l'on utilise dans l'équation [150] le terme $\mathbf{Q}(\mathbf{q}^d)$, constant pour \mathbf{q}^d donné, qui correspond aux couples de gravité sur la position finale, plutôt que le terme $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$. La stabilité est aussi assurée si l'on prend $K_{pj} > \|\partial \mathbf{Q}(\mathbf{q})/\partial \mathbf{q}\|$, terme qui représente la norme 2 de la matrice jacobienne des couples de gravité par rapport au vecteur des variables articulaires \mathbf{q} [Korrami 88], [Tomei 91]. L'utilisation de grands gains pour \mathbf{K}_p et \mathbf{K}_d diminue l'erreur de suivi mais amène le système au voisinage du domaine d'instabilité. Pour un réglage des gains qui tienne compte du modèle dynamique, le lecteur pourra consulter [Qu 91], [Kelly 95], [Rocco 96], [Freidovich 97].

3.3.2. Commande PID dans l'espace opérationnel

Lorsque le mouvement est défini dans l'espace opérationnel, une des deux solutions suivantes peut être choisie pour réaliser la commande du système :

- on transforme le mouvement défini dans l'espace opérationnel en un mouvement dans l'espace articulaire, puis on met en œuvre la commande dans l'espace articulaire. Le signal d'erreur minimisé est alors exprimé dans l'espace articulaire ;
- on spécifie directement la commande dans l'espace opérationnel.

Pour une commande PID dans l'espace opérationnel, la loi de commande est obtenue en remplaçant \mathbf{q} par \mathbf{X} dans l'équation [142] et en multipliant l'erreur dans l'espace opérationnel par \mathbf{J}^T pour l'exprimer dans l'espace articulaire (Figure 19) :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}^T [\mathbf{K}_p (\mathbf{X}^d - \mathbf{X}) + \mathbf{K}_d (\dot{\mathbf{X}}^d - \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{K}_I \int_{t_0}^t (\mathbf{X}^d - \mathbf{X}) d\tau] \quad [154]$$

Pour décrire le mouvement désiré dans l'espace articulaire lorsque celui-ci est spécifié dans l'espace opérationnel, deux solutions sont possibles : soit seul le modèle géométrique inverse est utilisé, puis avec une procédure numérique, on dérive la position désirée pour obtenir la vitesse et l'accélération désirées ; soit on calcule les positions, vitesses et accélérations articulaires :

i) à partir du modèle géométrique inverse (MGI) pour les positions articulaires :

$$\mathbf{q}^d = \mathbf{MGI}(\mathbf{X}^d) \quad [155]$$

ii) à partir du modèle cinématique inverse dans les positions régulières :

$$\dot{\mathbf{q}}^d = \mathbf{J}(\mathbf{q}^d)^{-1} \dot{\mathbf{X}}^d \quad [156]$$

Dans les positions singulières ou pour les robots redondants, on remplace \mathbf{J}^{-1} par une inverse généralisée telle que la pseudo inverse ;

iii) à partir du modèle cinématique inverse du deuxième ordre :

$$\ddot{\mathbf{q}}^d = \mathbf{J}^{-1} (\ddot{\mathbf{X}}^d - \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}^d) \quad [157]$$

avec :

$$\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}^d, \dot{\mathbf{q}}^d) = \frac{d}{dt} \mathbf{J}(\mathbf{q}^d) \quad [158]$$

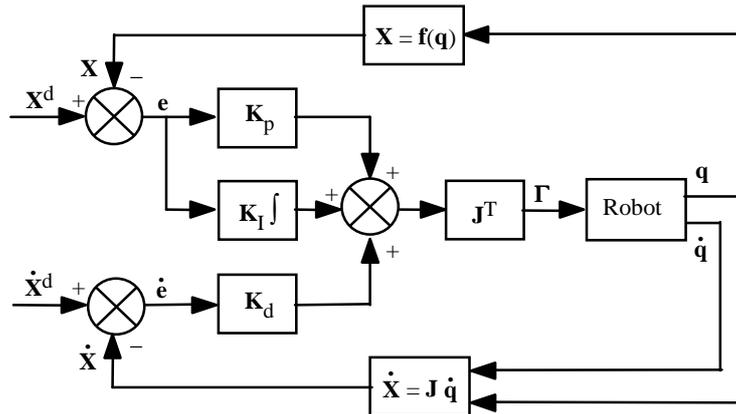


Figure 19. Schéma d'une commande PID dans l'espace opérationnel

3.4. Commande par découplage non linéaire

3.4.1. Introduction

Lorsque l'application exige des évolutions rapides du robot et une grande précision dynamique, il est nécessaire de concevoir un système de commande plus sophistiqué qui prenne en compte tout ou partie des forces d'interaction dynamiques. L'utilisation de la commande par découplage non linéaire constitue une bonne approche en ce sens [Khalil 78], [Zabala 78], [Raibert 78], [Khatib 80], [Luh 80], [Freund 82], [Bejczy 85]... Ce type de commande est aussi connu sous le nom de *commande dynamique* (ou "couple calculé", *computed torque* dans la littérature anglo-saxonne) parce qu'il est fondé sur l'utilisation du modèle dynamique. Théoriquement, il assure le découplage et la linéarisation des équations du modèle, ayant pour effet une réponse uniforme quelle que soit la configuration du robot.

La mise en œuvre de cette méthode exige le calcul du modèle dynamique en ligne et la connaissance des valeurs numériques des paramètres inertiels et de frottements, ce qui ne constitue plus maintenant une limite rédhibitoire. Le problème du calcul en ligne est en effet résolu pratiquement grâce aux méthodes de modélisation et grâce aux évolutions technologiques en micro-informatique. Le développement des techniques d'identification permet une bonne évaluation des paramètres dynamiques.

La commande par découplage non linéaire consiste à transformer par retour d'état le problème de commande d'un système non linéaire en un problème de commande d'un système linéaire. Dans le cas général, le problème de linéarisation par retour d'état d'un système non linéaire n'est pas facile à résoudre. Cependant, dans le cas des robots-manipulateurs rigides, l'élaboration d'une loi de commande qui linéarise et découple les équations est simplifiée par le fait que le nombre d'actionneurs est égal au nombre de variables articulaires et que le modèle dont on dispose est un modèle inverse qui exprime l'entrée Γ du système en fonction du vecteur d'état $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ et de $\ddot{\mathbf{q}}$. Ces propriétés font que les équations du robot définissent un *système plat* dont les *sorties plates* sont les variables articulaires \mathbf{q} [Fliess 95]. Etant donné que la loi de commande utilise seulement les variables d'état \mathbf{q} et $\dot{\mathbf{q}}$, on qualifie cette loi, qui est équivalente à une commande plate, de commande par découplage statique. Dans ce qui suit, on développe cette méthode, tout d'abord dans l'espace articulaire, puis dans l'espace opérationnel.

3.4.2. Commande dans l'espace articulaire

3.4.2.1. Principe de la commande

Soit $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{H}}$ les estimations respectives de \mathbf{A} et \mathbf{H} . On suppose que les positions et vitesses articulaires sont mesurables et que les mesures ne sont pas bruitées. Partant de l'équation [139], si l'on choisit une commande $\mathbf{\Gamma}$ telle que [Khalil 79] :

$$\mathbf{\Gamma} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \mathbf{w}(t) + \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad [159]$$

alors, dans le cas idéal où le modèle est supposé parfait, le système est régi par l'équation :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}(t) \quad [160]$$

$\mathbf{w}(t)$ peut être considéré comme un nouveau vecteur de commande. On se ramène donc à un problème de commande de n systèmes linéaires, invariants, découplés et du second ordre (doubles intégrateurs). Plusieurs choix peuvent être envisagés pour $\mathbf{w}(t)$. Nous étudierons notamment, le cas où le mouvement désiré est complètement spécifié et le cas où seulement la position finale est donnée.

3.4.2.2. Cas où le mouvement est complètement spécifié

On désigne respectivement par $\ddot{\mathbf{q}}^d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}^d(t)$ et $\mathbf{q}^d(t)$ l'accélération, la vitesse et la position désirées dans l'espace articulaire. Si l'on calcule $\mathbf{w}(t)$ selon la relation suivante⁴ :

$$\mathbf{w}(t) = \ddot{\mathbf{q}}^d + \mathbf{K}_d (\dot{\mathbf{q}}^d - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_p (\mathbf{q}^d - \mathbf{q}) \quad [161]$$

où \mathbf{K}_p et \mathbf{K}_d sont des matrices diagonales définies positives de dimension $(n \times n)$ alors, d'après l'équation [160], la réponse du système en boucle fermée est décrite par l'équation linéaire découplée suivante :

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad [162]$$

$$\text{où } \mathbf{e} = \mathbf{q}^d - \mathbf{q}.$$

La solution de l'équation de l'erreur $\mathbf{e}(t)$ est globalement exponentiellement stable. Les gains K_{pj} et K_{dj} sont choisis pour imposer à l'erreur de l'axe j la dynamique désirée d'amortissement ξ_j et de pulsation ω_j quelle que soit la configuration du robot :

$$\begin{cases} K_{pj} = \omega_j^2 \\ K_{dj} = 2 \xi_j \omega_j \end{cases} \quad [163]$$

En général, on choisit un amortissement égal à 1 pour avoir une réponse sans dépassement. Le schéma-bloc de cette loi de commande est représenté sur la figure 20. Le signal de commande aux actionneurs comporte trois parties : la première compense les couples et forces de Coriolis, centrifuges, de gravité et de frottement, la deuxième est une correction de position et de vitesse à gains variables représentée respectivement par $\hat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_p$ et $\hat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_d$ tandis que la troisième constitue une anticipation des forces d'accélération désirées $\hat{\mathbf{A}} \ddot{\mathbf{q}}^d$.

Lorsqu'il y a des erreurs de modélisation, l'équation de la boucle fermée correspondant à la commande de la figure 20 est obtenue en utilisant les relations [159] et [139] :

$$\hat{\mathbf{A}} (\ddot{\mathbf{q}}^d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}) + \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} \quad [164]$$

et on en déduit que :

⁴ On peut envisager également l'ajout d'un terme intégral sur $\mathbf{w}(t)$.

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \hat{\mathbf{A}}^{-1} [(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}] \quad [165]$$

On remarque avec la relation [165] que les erreurs de modélisation constituent une excitation pour l'équation de l'erreur. Il en résulte que lorsque ces erreurs sont importantes, il faut augmenter d'autant les gains de position et de vitesse, mais ces valeurs sont limitées par la stabilité du système. Pour une étude détaillée de la robustesse et de la stabilité de cette loi de commande, le lecteur pourra consulter l'ouvrage de Samson *et al.* [Samson 87]. Pour que le système soit stable, on montre en particulier que la matrice $\hat{\mathbf{A}}$ doit être définie positive. On montre aussi que les erreurs \mathbf{e} et $\dot{\mathbf{e}}$ diminuent lorsque les gains augmentent.

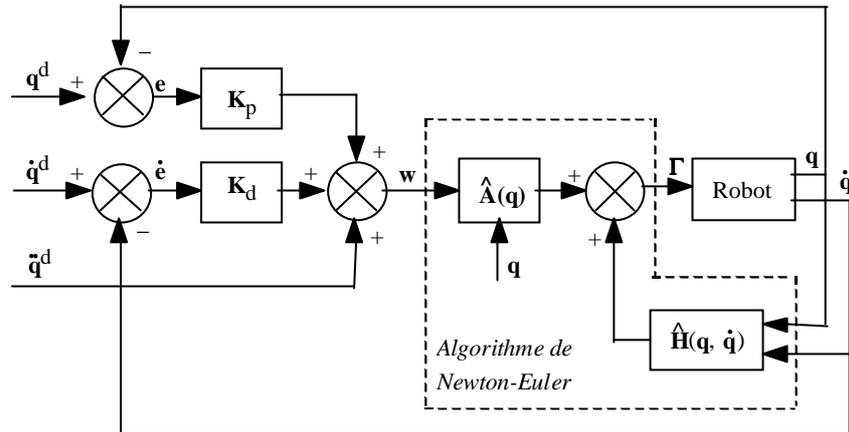


Figure 20. Loi de commande pour un mouvement complètement spécifié

3.4.2.3. Cas où seule la position finale est spécifiée

Dans ce cas, le but à atteindre est la position \mathbf{q}^d . Un choix possible pour $\mathbf{w}(t)$ est de prendre (figure 21) :

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{K}_p (\mathbf{q}^d - \mathbf{q}) - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \quad [166]$$

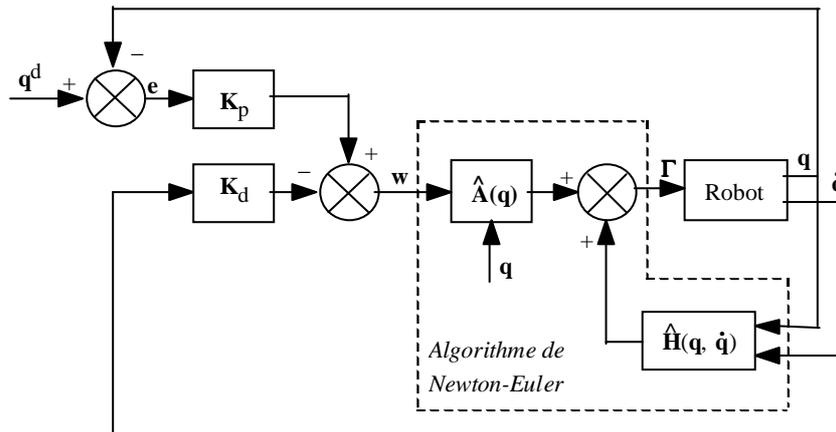


Figure 21. Découplage non linéaire où seule la position finale est spécifiée

A partir des équations [159] et [164], si la modélisation est parfaite et pour des erreurs initiales nulles, on déduit l'équation de la boucle fermée du système :

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_p \mathbf{q} = \mathbf{K}_p \mathbf{q}^d \quad [167]$$

qui est une équation linéaire découplée du deuxième ordre dont la solution $\mathbf{q}(t)$ est globalement exponentiellement stable. Les gains \mathbf{K}_p et \mathbf{K}_d sont choisis pour imposer la dynamique désirée à $\mathbf{q}(t)$.

3.4.2.4. Commande dynamique prédictive

Un autre schéma de commande peut être établi en utilisant une commande dynamique prédictive dans laquelle le calcul de $\hat{\mathbf{A}}$ et de $\hat{\mathbf{H}}$ se fait, non pas en fonction des valeurs courantes de \mathbf{q} et de $\dot{\mathbf{q}}$, mais plutôt en fonction des variables du mouvement désiré \mathbf{q}^d et $\dot{\mathbf{q}}^d$ [Khalil 78]. Dans ce cas, la loi de commande a pour expression :

$$\mathbf{\Gamma} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}^d) \mathbf{w}(t) + \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}^d, \dot{\mathbf{q}}^d) \quad [168]$$

le vecteur de commande $\mathbf{w}(t)$ étant donné par l'équation [161].

Si le suivi est correct, on peut supposer que $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}^d)$ et que $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}^d, \dot{\mathbf{q}}^d)$. En l'absence d'erreurs de modélisation et pour des erreurs initiales nulles, la loi de commande [168] linéarise et découple les équations du système comme dans le cas précédent. L'avantage essentiel de cette loi est que le calcul de $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}^d)$ et $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}^d, \dot{\mathbf{q}}^d)$ n'est pas contaminé par les bruits de mesure.

3.4.2.5. Calcul pratique des lois de commande par découplage non linéaire

Les lois de commande représentées par les relations [159] et [168] peuvent être calculées par l'algorithme de calcul du modèle dynamique inverse de Newton-Euler (§ 1.4.2.) sans nécessiter la connaissance explicite des matrices \mathbf{A} et \mathbf{H} . On rappelle que cet algorithme fournit les valeurs des couples moteurs en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires. En comparant les relations [139] et [159], on conclut que :

- le calcul des lois de commande qui correspondent à l'équation [159] (figures 20 et 21) peut être réalisé par l'algorithme de Newton-Euler en utilisant comme arguments d'entrée :
 - la position articulaire égale à la position articulaire courante \mathbf{q} ;
 - la vitesse articulaire égale à la vitesse articulaire courante $\dot{\mathbf{q}}$;
 - l'accélération articulaire égale à $\mathbf{w}(t)$;
- le calcul de la loi de commande prédictive de l'équation [168] peut être réalisé en choisissant comme arguments :
 - la position articulaire égale à la position articulaire désirée \mathbf{q}^d ;
 - la vitesse articulaire égale à la vitesse articulaire désirée $\dot{\mathbf{q}}^d$;
 - l'accélération articulaire égale à $\mathbf{w}(t)$.

Le coût en calcul de la commande par découplage non linéaire dans l'espace articulaire est donc quasiment égal au nombre d'opérations nécessaires pour établir le modèle dynamique. Ainsi, pour réaliser cette commande, on doit essentiellement disposer d'un algorithme de calcul du modèle dynamique performant, problème considéré comme résolu. On commence à trouver sur certaines baies de commande de robots industriels une implémentation partielle de la commande par découplage non linéaire.

3.4.3. Commande par découplage non linéaire dans l'espace opérationnel

Le comportement dynamique du robot dans l'espace opérationnel est décrit par l'équation suivante, obtenue en exprimant dans la relation [139] $\ddot{\mathbf{X}}$ en fonction de $\ddot{\mathbf{X}}$ en utilisant le modèle cinématique du deuxième ordre :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A} \mathbf{J}^{-1}(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{H} \quad [169]$$

Comme il a été fait dans l'espace articulaire, une loi de commande qui linéarise et découple les équations dans l'espace opérationnel est donnée par :

$$\mathbf{\Gamma} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{w}(t) - \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{H}} \quad [170]$$

Avec cette loi et en supposant un modèle parfait, le système est régi par l'équation du double intégrateur dans l'espace opérationnel :

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{w}(t) \quad [171]$$

Comme pour la commande dans l'espace articulaire, on peut proposer plusieurs schémas [Chevallereau 88b]. On détaille ici le cas d'une correction PD lorsque le mouvement est complètement spécifié. On pose alors :

$$\mathbf{w}(t) = \ddot{\mathbf{X}}^d + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{X}}^d - \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{K}_p(\mathbf{X}^d - \mathbf{X}) \quad [172]$$

Avec cette loi, dans l'hypothèse d'une modélisation parfaite et d'erreurs initiales nulles, le comportement du robot est décrit par l'équation :

$$\ddot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x = \mathbf{0} \quad [173]$$

avec :

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{X}^d - \mathbf{X} \quad [174]$$

Le schéma-bloc correspondant est représenté sur la figure 22. La valeur de Γ est calculée par l'algorithme de Newton-Euler en choisissant comme arguments d'entrée :

- la position articulaire égale à la position articulaire courante \mathbf{q} ;
- la vitesse articulaire égale à la vitesse articulaire courante $\dot{\mathbf{q}}$;
- l'accélération articulaire égale à $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{w}(t) - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}})$.

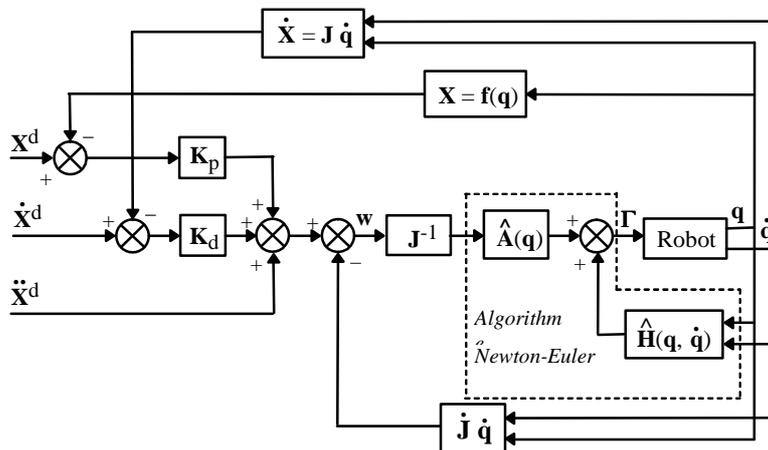


Figure 22. Commande par découplage non linéaire dans l'espace opérationnel

REMARQUE.– Lorsque le robot est redondant, on remplace dans la relation [170] la matrice \mathbf{J}^{-1} par une inverse généralisée. On montre que, dans les configurations régulières, le robot est aussi régi par l'équation [173]. Le terme d'optimisation associé à l'inverse généralisée doit être convenablement choisi afin d'éviter les mouvements articulaires dans le noyau de \mathbf{J} [Hsu 88], [Ait Mohamed 95], [de Luca 91].

4. Conclusion

Comme indiqué en introduction, les outils méthodologiques présentés dans ce document constituent les bases pour la modélisation, la génération de mouvement et la commande des robots-manipulateurs de type série, bases nécessaires avant d'aborder l'étude des cinématiques plus complexes, notamment à chaînes fermées ou parallèles. Les nombreuses références qui accompagnent le texte permettront à l'étudiant d'approfondir ses connaissances sur ces sujets. Elles reflètent le foisonnement des travaux et des approches depuis presque 40 ans qui ont permis à la Robotique de devenir une discipline à part entière avec de nombreuses applications qui, même si elles n'ont pas encore atteint le déploiement que l'on attendait à l'époque, sont très prometteuses dans de nombreux domaines.

Bibliographie

- [**Ait Mohamed 95**] Ait Mohamed A., "Commande dynamique de robots redondants dans l'espace opérationnel", Thèse de Doctorat, Université de Nantes et Ecole Centrale de Nantes, France, February 1995.
- [**Aldon 82**] Aldon M.J., "Elaboration automatique de modèles dynamiques de robots en vue de leur conception et de leur commande", Thèse d'Etat, USTL, Montpellier, oct. 1982.
- [**Arimoto 84**] Arimoto S., Miyazaki F., "Stability and robustness of PID feedback control for robots manipulators of sensory capability", *The 1st Int. Symp. of Robotics Research*, MIT Press, Cambridge, 1984.
- [**Armstrong 79**] Armstrong W.W., "Recursive solution to the equation of motion of an N-links manipulator", *Proc. 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Montréal, 1979, p. 1343-1346.
- [**Armstrong 88**] Armstrong B., "Dynamics for robot control: friction modeling and ensuring excitation during parameter identification", Ph. D Thesis, Dept. of Electrical Engineering, Stanford University, May 1988.
- [**Armstrong 91**] Armstrong B., *Control of Machines with frictions*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [**Armstrong 94**] Armstrong-Hélouvy B., Dupont P., Canudas de Wit C., "A survey of analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction", *Automatica*, Vol. 30(10), 1994, p. 1083-1138.
- [**Baillieul 84**] Baillieul J., Hollerbach J.M., Brockett R., "Programming and control of kinematically redundant manipulators", *Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, déc.1984, p. 768-774.
- [**Baillieul 85**] Baillieul J., "Kinematic programming alternatives for redundant manipulators", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, St Louis, mars 1985, p. 722-728.
- [**Baillieul 86**] Baillieul J., "Avoiding obstacles and resolving kinematic redundancy", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San Francisco, avril 1986, p. 1698-1704.
- [**Bejczy 85**] Bejczy A.K., Tarn T.J., Yun X., Hans S., "Non linear feedback control of Puma 560 robot arm by computer", *Proc. 24th IEEE Conf. on Decision and Control*, Fort Lauderdale, USA, December 1985, p. 1680-1688.
- [**Borrel 79**] Borrel P., "Modèle de comportement de manipulateurs ; application à l'analyse de leurs performances et à leur commande automatique", Thèse de Troisième Cycle, USTL, Montpellier, déc. 1979.
- [**Borrel 86**] Borrel P., "Contribution à la modélisation géométrique des robots-manipulateurs ; application à la conception assistée par ordinateur", Thèse d'Etat, USTL, Montpellier, juillet 1986.
- [**Burdick 86**] Burdick J.W., "An algorithm for generation of efficient manipulator dynamic equations", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San Francisco, avril 1986, p. 212-218.
- [**Canudas 89**] Canudas de Wit C., Noël P., Aubin A., Brogliato B., Drevet P., "Adaptive Friction compensation in robot manipulators: low-velocities", *Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation*, Scottsdale, mai 1989, p. 1352-1357.
- [**Canudas 90**] Canudas de Wit C., Seront V., "Robust adaptive friction compensation", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Cincinnati, mai 1990, p. 1383-1389.
- [**Castain 84**] Castain R.H., Paul R.P., "An on-line dynamic trajectory generator", *The Int. J. of Robotics Research*, Vol. 3(1), 1984, p. 68-72.
- [**Cesareo 84**] Cesareo G., Nicolo F., Nicosia S., "DYMIR: a code for generating dynamic model of robots", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics*, Atlanta, mars 1984, p. 115-120.
- [**Chang 86**] Chang P.H., "A closed form solution for the control of manipulators with kinematic redundancy", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San Francisco, avril 1986, p. 9-14.
- [**Chedmail 86**] Chedmail P., Gautier M., Khalil W., "Automatic modelling of robots including parameters of links and actuators", *Proc. IFAC Symp. on Theory of Robots*, Vienne, Autriche, déc.1986, p. 295-299.
- [**Chedmail 90**] Chedmail P., Gautier M., "Optimum choice of robot actuators", *Trans. of ASME, J. of Engineering for Industry*, Vol. 112(4), 1990, p. 361-367.
- [**Chevallereau 87**] Chevallereau C., Khalil W., "Efficient method for the calculation of the pseudo inverse kinematic problem", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Raleigh, mars-avril 1987, p. 1842-1848.
- [**Chevallereau 88a**] Chevallereau C., Khalil W., "A new method for the solution of the inverse kinematics of redundant robots", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Philadelphia, avril 1988, p. 37-42.
- [**Chevallereau 88b**] Chevallereau C., "Contribution à la commande des robots-manipulateurs dans l'espace opérationnel", Thèse de Doctorat, ENSM, Nantes, mai 1988.
- [**Coiffet 81**] Coiffet P., *Les Robots ; Tome 1 : Modélisation et commande*, Hermès, Paris, 1981.
- [**Craig 86**] Craig J.J., *Introduction to robotics: mechanics and control*, Addison Wesley Publishing Company, Reading, 1986.

- [**Dahl 77**] Dahl P.R., "Measurements of solid friction parameters of ball bearings", *Proc. of the 6th Annual Symp. on Incremental Motion Control Systems and Devices*, University of Illinois, 1977.
- [**Denavit 55**] Denavit J., Hartenberg R.S., "A kinematic notation for lower pair mechanism based on matrices", *Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 22, juin 1955, p. 215-221.
- [**de Luca 91**] de Luca A., Oriolo G., "Issues in acceleration resolution of robot redundancy", *Proc. IFAC Symp. on Robot Control, SYROCO'91*, Vienna, Austria, 1991, p. 665-670.
- [**Dillon 73**] Dillon S.R., "Computer assisted equation generation in linkage dynamics", Ph. D. Thesis, Ohio State University, août 1973.
- [**Featherstone 83**] Featherstone R., "Position and velocity transformations between robot end-effector coordinates and joint angles", *The Int. J. of Robotics Research*, Vol. 2(2), 1983, p. 35-45.
- [**Ferreira 84**] Ferreira E.P., "Contribution à l'identification de paramètres et à la commande des robots manipulateurs", Thèse de Docteur-Ingénieur, UPS, Toulouse, juillet 1984.
- [**Fliess 95**] Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P., "Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples", *Int. J. Control*, Vol. 61, 1995, p. 1327-1361.
- [**Fournier 80**] Fournier A., "Génération de mouvements en robotique ; application des inverses généralisées et des pseudo-inverses", Thèse d'Etat, USTL, Montpellier, avril 1980.
- [**Freidovich 97**] Freidovich L.B., Pervozvanski A.A., "Some estimates of performance for PID-like control of robotic manipulators", *Proc. IFAC Symp. on Robot Control, SYROCO'97*, Nantes, France, September 1997, p. 85-90.
- [**Freund 82**] Freund E., "Fast nonlinear control with arbitrary pole placement for industrial robots and manipulators", *The Int. J. of Robotics Research*, Vol. 1(1), 1982, p. 65-78.
- [**Goldenberg 85**] Goldenberg A.A., Benhabib B., Fenton R.G., "A complete generalized solution to inverse kinematics of robots", *IEEE J. of Robotics and Automation*, Vol. RA-1(1), 1985, p. 14-20.
- [**Gorla 84**] Gorla B., Renaud M., *Modèles des robots-manipulateurs ; application à leur commande*, Cepadues Editions, Toulouse, 1984.
- [**Hahn 67**] Hahn W., *Stability of Motion*, Springer-Verlag, New York, USA, 1967.
- [**Hollerbach 80**] Hollerbach J.M., "An iterative lagrangian formulation of manipulators dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-10(11), 1980, p. 730-736.
- [**Hollerbach 84a**] Hollerbach J.M., "Dynamic scaling of manipulator trajectories", *Trans. of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 106(1), March 1984, p. 102-106.
- [**Hollerbach 84b**] Hollerbach J.M., "Optimum kinematic design for a seven degree of freedom manipulator", *Proc. 2nd Int. Symp. of Robotics Research*, Kyoto, août 1984, p. 349-356.
- [**Hollerbach 85**] Hollerbach J.M., Suh K.C., "Redundancy resolution of manipulators through torque optimization", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, St Louis, mars 1985, p. 1016-1021.
- [**Hooker 65**] Hooker W.W., Margulies G., "The dynamical attitude equations for a n-body satellite", *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 12(4), 1965, p. 123-128.
- [**Hsu 88**] Hsu P., Hauser J., Sastry S., "Dynamic control of redundant manipulators", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Philadelphia, USA, April 1988, p. 183-187.
- [**Izaguirre 86**] Izaguirre A., Paul R.C.P., "Automatic generation of the dynamic equations of the robot manipulators using a LISP program", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San Francisco, avril 1986, p. 220-226.
- [**Kelly 95**] Kelly R., "A tuning procedure for stable PID control of robot manipulators", *Robotica*, Vol. 13, 1995, p. 141-148.
- [**Khalil 76**] Khalil W., "Modélisation et commande par ordinateur du manipulateur MA-23 ; extension à la conception par ordinateur des manipulateurs", Thèse de Docteur-Ingénieur, USTL, Montpellier, sept. 1976.
- [**Khalil 78**] Khalil W., "Contribution à la commande automatique des manipulateurs avec l'aide d'un modèle mathématique des mécanismes", Thèse d'Etat, USTL, Montpellier, France, October 1978.
- [**Khalil 79**] Khalil W., Liegeois A., Fournier A., "Commande dynamique des robots", *Revue RAIRO Automatique / Systems Analysis and Control*, Vol. 13(2), 1979, p. 189-201.
- [**Khalil 85**] Khalil W., Kleinfinger J.-F., "Une modélisation performante pour la commande dynamique de robots", *Revue RAIRO, APII*, Vol. 6, 1985, p. 561-574.
- [**Khalil 86**] Khalil W., Kleinfinger J.-F., "A new geometric notation for open and closed-loop robots", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San Francisco, avril 1986, p. 1174-1180.
- [**Khalil 87**] Khalil W., Kleinfinger J.-F., "Minimum operations and minimum parameters of the dynamic model of tree structure robots", *IEEE J. of Robotics and Automation*, Vol. RA-3(6), déc. 1987, p. 517-526.
- [**Khalil 89**] Khalil W., Bennis F., Chevallereau C., Kleinfinger J.-F., "SYMORO: a software package for the symbolic modelling of robots", *Proc. 20th Int. Symp. on Industrial Robots*, Tokyo, oct. 1989, p. 1023-1030.

- [**Khalil 97**] Khalil W., Creusot D., "SYMORO+: a system for the symbolic modelling of robots", *Robotica*, Vol. 15, 1997, p. 153-161.
- [**Khalil 02**] Khalil W., Dombre E., *Modelisation, identification and control of robots*, Hermes Penton Science, London, ISBN 1-90399-613-9, 2002, 480 p.
- [**Khatib 80**] Khatib O., "Commande dynamique dans l'espace opérationnel des robots-manipulateurs en présence d'obstacles", Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, December 1980.
- [**Khosla 86**] Khosla P.K., "Real-time control and identification of direct drive manipulators", Ph. D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1986.
- [**Kircanski 85**] Kircanski M., Vukobratovic M., "Computer-aided generation of manipulator kinematic models in symbolic form", *Proc. 15th Int. Symp. on Industrial Robots*, Tokyo, sept. 1985, p. 1043-1049.
- [**Klein 84**] Klein C.A., "Use of redundancy in the design of robotic systems", *Proc. 2nd Int. Symp. of Robotic Research*, Kyoto, août 1984, p. 58-65.
- [**Koditschek 84**] Koditschek D.E., "Natural motion for robot arms", *Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, déc. 1984, p. 737-735.
- [**Korrami 88**] Korrami F., Özgüner U., "Decentralized control of robot manipulators via state and proportional-integral feedback", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Philadelphia, USA, April 1988, p. 1198-1203.
- [**Kreuzer 79**] Kreuzer E.J., "Dynamical analysis of mechanisms using symbolical equation manipulation", *Proc. 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Montréal, 1979, p. 599-602.
- [**Lee 88**] Lee H.Y., Liang C.G., "Displacement analysis of the general 7-link 7R mechanism", *J. of Mechanism and Machine Theory*, Vol. 23(3), 1988, p. 219-226.
- [**Lewis 93**] Lewis F.L., Abdallah C.T., Dawson D.M., *Control of robot manipulators*, Macmillan, New York, USA, 1993.
- [**Llibre 83**] Llibre M., Mampey R., Chrétien J.P., "Simulation de la dynamique des robots manipulateurs motorisés", *Congrès AFCET : Productique et Robotique Intelligente*, Besançon, nov. 1983, p. 197-207.
- [**Luh 80**] Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R.C.P., "On-line computational scheme for mechanical manipulators", *Trans. of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 102(2), 1980, p. 69-76.
- [**Luh 85**] Luh J.Y.S., Gu Y.L., "Industrial robots with seven joints", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, St Louis, mars 1985, p. 1010-1015.
- [**Maciejewski 85**] Maciejewski A.A., Klein C.A., "Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments", *The Int. J. of Robotics Research*, Vol. 4(3), Fall 1985, p. 109-117.
- [**Megahed 84**] Megahed S., "Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots manipulateurs ayant une structure de chaîne cinématique simple ou complexe ; application à leur commande", Thèse d'Etat, UPS, Toulouse, juillet 1984.
- [**Murray 84**] Murray J.J., Newman C.P., "ARM: an algebraic robot dynamic modeling program", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Atlanta, mars 1984, p. 103-104.
- [**Nenchev 92**] Nenchev D.N., "Restricted jacobian matrices of redundant manipulators in constrained motion tasks", *The Int. J. of Robotics Research*, Vol. 11(6), 1992, p. 584-597.
- [**Orin 79**] Orin D.E., McGhee R.B., Vukobratovic M., Hartoch G., "Kinematic and kinetic analysis of open-chain linkages utilizing Newton-Euler methods", *Mathematical Biosciences*, Vol. 43, 1979, p. 107-130.
- [**Paul 81**] Paul R.C.P., *Robot manipulators: mathematics, programming and control*, MIT Press, Cambridge, 1981.
- [**Pieper 68**] Pieper D.L., "The kinematics of manipulators under computer control", Ph. D. Thesis, Stanford University, 1968.
- [**Potkonjak 86**] Potkonjak V., "Thermal criterion for the selection of DC drives for industrial robots", *Proc. 16th Int. Symp. on Industrial Robots*, Bruxelles, sept.-oct. 1986, p. 129-140.
- [**Qu 91**] Qu Z., Dorsey J., "Robust PID control of robots", *Int. J. Robotics and Automation*, Vol. 6(4), 1991, p. 228-235.
- [**Raghavan 90**] Raghavan M., Roth B., "Inverse kinematics of the general 6R manipulator and related linkages", *Trans. of the ASME, J. of Mechanical Design*, Vol. 115, 1990, p. 502-508.
- [**Raibert 78**] Raibert M.H., Horn B.K.P., "Manipulator control using the configuration space method", *The Industrial Robot*, Vol. 5(2), 1978, p. 69-73.
- [**Renaud 75**] Renaud M., "Contribution à l'étude de la modélisation et de la commande des systèmes mécaniques articulés", Thèse de Docteur-Ingénieur, UPS, Toulouse, déc. 1975.
- [**Renaud 80a**] Renaud M., "Contribution à la modélisation et à la commande dynamique des robots manipulateurs", Thèse d'Etat, UPS, Toulouse, sept. 1980.

- [**Renaud 80b**] Renaud M., "Calcul de la matrice jacobienne nécessaire à la commande coordonnée d'un manipulateur", *J. of Mechanism and Machine Theory*, Vol. 15(1), 1980, p. 81-91.
- [**Renaud 85**] Renaud M., "A near minimum iterative analytical procedure for obtaining a robot-manipulator dynamic model", *IUTAM/IFToMM Symp. on Dynamics of Multi-body Systems*, Udine, 1985.
- [**Renaud 87**] Renaud M., "Quasi-minimal computation of the dynamic model of a robot manipulator utilizing the Newton-Euler formalism and the notion of augmented body", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Raleigh, mars-avril 1987, p. 1677-1682.
- [**Rocco 96**] Rocco P., "Stability of PID control for industrial robot arms", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. RA-12(4), 1996, p. 607-614.
- [**Roth 76**] Roth B., "Performance evaluation of manipulators from a kinematic viewpoint", Cours de Robotique, IRIA, Toulouse, 1976, p. 233-263.
- [**Samson 83**] Samson C., "Problèmes en identification et commande de systèmes dynamiques", Thèse d'Etat, Rennes, France, 1983.
- [**Samson 87**] Samson C., "Robust control of a class of non-linear systems and applications to robotics", *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 1, 1987, p. 49-68.
- [**Samson 91**] Samson C., Le Borgne M., Espiau B., *Robot Control*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1991.
- [**Sciavicco 86**] Sciavicco L., Siciliano B., "Coordinate transformation; a solution algorithm for one class of robots", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-16(4), 1986, p. 550-559.
- [**Sciavicco 94**] Sciavicco L., Siciliano B., Villani L., "On dynamic modelling of gear-driven rigid robot manipulators", *Proc. 4th IFAC Symp. on Robot Control, SYROCO'94*, Capri, sept. 1994, p. 543-549.
- [**Sheth 71**] Sheth P.N., Uicker J.J., "A generalized symbolic notation for mechanism", *Trans. of ASME, J. of Engineering for Industry*, Vol. 93, 1971, p. 102-112.
- [**Spong 89**] Spong M.W., Vidyasagar M., *Robot dynamics and control*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1989.
- [**Tomei 91**] Tomei P., "Adaptive PD controller for robot manipulators", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. RA-7(4), 1991, p. 565-570.
- [**Uicker 69**] Uicker J.J., "Dynamic behavior of spatial linkages", *Trans. of ASME, J. of Engineering for Industry*, Vol. 91, 1969, p. 251-258.
- [**Vukobratovic 82**] Vukobratovic M., Potkonjak V., *Dynamics of manipulation robots; Vol. 1: Theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [**Wenger 89**] Wenger P., "Aptitude d'un robot manipulateur à parcourir son espace de travail en présence d'obstacles", Thèse de Doctorat, ENSM, Nantes, sept. 1989.
- [**Whitney 69**] Whitney D.E., "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses", *IEEE Trans. on Man Machine Systems*, Vol. MMS-10(2), juin 1969, p. 47-53.
- [**Whitney 72**] Whitney D.E., "The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulators", *Trans. of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 94, déc. 1972, p. 303-309.
- [**Wolovich 84**] Wolovich W.A., Elliott H., "A computational technique for inverse kinematics", *Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, déc. 1984, p. 1359-1363.
- [**Yoshikawa 84**] Yoshikawa T., "Analysis and control of robot manipulators with redundancy", *The 1st Int. Symp. of Robotics Research*, MIT Press, Cambridge, 1984, p. 735-748.
- [**Zabala 78**] Zabala Iturralde J., "Commande des robots-manipulateurs à partir de la modélisation de leur dynamique", Thèse de Troisième Cycle, UPS, Toulouse, juillet 1978.
- [**Zodiac 96**] The Zodiac, *Theory of robot control*, C. Canudas de Wit, B. Siciliano, G. Bastin Eds., Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1996.

Table des matières

1. Modélisation.....	1
1.1 Introduction.....	1
1.2. Modélisation géométrique.....	1
1.2.1. Description géométrique.....	1
1.2.2. Modèle géométrique direct.....	4
1.2.3. Modèle géométrique inverse.....	5
1.2.3.1. Position du problème.....	6
1.2.3.2. Principe de la méthode de Paul.....	7
1.3. Modélisation cinématique.....	10
1.3.1. Modèle cinématique direct.....	10
1.3.1.1. Calcul de la matrice jacobienne par dérivation du MGD.....	10
1.3.1.2. Matrice jacobienne cinématique.....	10
1.3.1.3. Décomposition de la matrice jacobienne en trois matrices.....	13
1.3.1.4. Dimension de l'espace opérationnel d'un robot.....	13
1.3.2. Modèle cinématique inverse.....	13
1.3.2.1. Forme générale du modèle cinématique.....	14
1.3.2.2. Modèle cinématique inverse dans le cas régulier.....	14
1.3.2.3. Solution au voisinage des positions singulières.....	15
1.4. Modélisation dynamique.....	17
1.4.1. Formalisme de Lagrange.....	18
1.4.1.1. Forme générale des équations dynamiques.....	18
1.4.1.2. Calcul de l'énergie.....	19
1.4.1.3. Propriétés du modèle dynamique.....	21
1.4.1.4. Prise en compte des frottements.....	21
1.4.1.5. Prise en compte des inerties des actionneurs.....	22
1.4.1.6. Prise en compte des efforts exercés par l'organe terminal sur son environnement.....	22
1.4.2. Formalisme de Newton-Euler.....	23
1.4.2.1. Equations de Newton-Euler linéaires par rapport aux paramètres inertiels.....	23
1.4.2.2. Forme pratique des équations de Newton-Euler.....	24
1.5. Conclusion.....	25
2. Génération de mouvement.....	25
2.1. Introduction.....	25
2.2. Génération de mouvement entre deux points dans l'espace articulaire.....	26
2.2.1. Interpolation polynomiale de degré cinq.....	26
2.2.2. Loi Bang-Bang.....	28
2.2.3. Loi trapezoïdale en vitesse.....	29
2.2.4. Lissage du mouvement trapézoïdal en vitesse.....	32
2.3. Génération de mouvement entre deux points dans l'espace opérationnel.....	34
3. Commande.....	36
3.1. Introduction.....	36
3.2. Equations du mouvement.....	36
3.3. Commande classique.....	37
3.3.1. Commande PID dans l'espace articulaire.....	37
3.3.2. Commande PID dans l'espace opérationnel.....	39
3.4. Commande par découplage non linéaire.....	40
3.4.1. Introduction.....	40
3.4.2. Commande dans l'espace articulaire.....	41
3.4.2.1. Principe de la commande.....	41
3.4.2.2. Cas où le mouvement est complètement spécifié.....	41
3.4.2.3. Cas où seule la position finale est spécifiée.....	42
3.4.2.4. Commande dynamique prédictive.....	43
3.4.2.5. Calcul pratique des lois de commande par découplage non linéaire.....	43
3.4.3. Commande par découplage non linéaire dans l'espace opérationnel.....	43

4. Conclusion 44
Bibliographie..... 45
Index 51

Index

- angles d'Euler, 5
- calcul symbolique, 25
- Commande classique, 37
- commande dynamique prédictive, 43
- commande par découplage non linéaire, 40
- Commande par découplage non linéaire, 43
- composition des vitesses, 20
- computed torque*, 40
- configurations singulières, 13
- degrés de liberté, 13
- énergie cinétique, 18, 19
- énergie potentielle, 18
- équations de Lagrange, 18
- équations de Newton-Euler, 23
- espace articulaire, 41
- espace opérationnel, 13, 34, 43
- fonction de Lyapunov, 38
- forces centrifuges, 19
- forces de Coriolis, 19
- forces de gravité, 19
- frottements, 21
- Homothétie*, 31
- inerties des actionneurs, 22
- interpolation polynomiale, 26
- jacobien cinématique, 10
- La Salle, 39
- lagrangien, 18
- Loi Bang-Bang*, 28
- matrice de transformation, 3
- matrice d'inertie, 19
- matrice jacobienne, 10
- méthode de Paul*, 7
- modèle cinématique direct, 10
- modèle cinématique inverse, 13, 39
- modèle dynamique direct, 17
- modèle dynamique inverse, 17, 43
- modèle géométrique direct, 4
- modèle géométrique inverse, 5
- Newton-Euler, 43, 44
- offset, 3
- paramètres géométriques, 2
- paramètres inertiels standard, 20, 21
- PID, 37
- positions singulières, 8, 15
- principe d'invariance, 39
- propriétés du modèle dynamique, 21
- pseudo-inverse, 15
- redondant, 13
- SCARA, 38
- singularité, 13
- sorties plates*, 40
- Stäubli RX-90, 3, 13, 15, 22
- structure variable, 36
- SYMORO+, 25
- système plat*, 40