

DEUXIÈME CHAPITRE

**Modélisation d'une Transmission Complexe
par Courroie Dentée et Programmation.**

SOMMAIRE

II.1. INTRODUCTION	85
II.2. HYPOTHÈSES DE TRAVAIL.....	85
II.2.1. LA COURROIE	85
II.2.1.1. <i>Caractéristiques géométriques de la courroie.....</i>	85
II.2.1.2. <i>Forme des brins libres de la courroie.....</i>	87
II.2.1.3. <i>Caractéristiques mécaniques de la courroie</i>	87
II.2.1.3.1. Raideur de l'âme de la courroie	87
II.2.1.3.2. Raideur d'une dent de courroie.....	88
II.2.1.3.3. Amortissement de la courroie	89
II.2.1.3.4. Inertie de la courroie	89
II.2.1.4. <i>Vibrations transversales des brins de courroie</i>	90
II.2.1.5. <i>Vibrations longitudinales des brins de courroie.....</i>	92
II.2.2. LA POULIE	92
II.2.2.1. <i>Élasticité des supports</i>	92
II.2.2.2. <i>La géométrie des poulies</i>	92
II.2.2.2.1. L'excentricité	93
II.2.2.2.2. Le balourd	94
II.2.2.2.3. L'effet polygonal.....	95
II.2.2.3. <i>Frottement poulie-courroie.....</i>	96
II.2.3. LE TENDEUR DYNAMIQUE.....	98
II.2.4. L'ACTION DE LA PESANTEUR	98
II.3. MODÉLISATION ET STRUCTURE DU PROGRAMME.....	99
II.3.1. ENTRÉES DU MODÈLE.....	100
II.3.1.1. <i>Géométrie de la transmission</i>	100
II.3.1.2. <i>Caractéristiques dynamiques.....</i>	101
II.3.1.3. <i>Contraintes extérieures au système.....</i>	101
II.3.2. 1^{ER} MODULE : CALCUL DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DE LA TRANSMISSION	102
II.3.3. 2^{ÈME} MODULE : CALCUL DE LA TENSION DANS LES BRINS	104

II.3.3.1. Modélisation du calcul de la tension dans les brins.....	104
II.3.3.2. Bibliographie concernant la forme d'une courroie due à sa raideur de flexion...	107
II.3.3.3. Calcul de la longueur L_{i0} d'un brin i sous une tension T	114
II.3.3.4. Calcul non-linéaire des tensions	115
II.3.4. 3 ^{EME} MODULE : CALCUL DES CHARGES ET DES DÉFORMATIONS SUR LES DENTS DE COURROIE ENROULÉES.....	115
II.3.4.1. Modèle Gerbert (1978).....	116
II.3.4.1.1. Modèle sans frottement.....	116
II.3.4.1.2. Modèle avec frottement	117
II.3.4.1.3. Conclusion	119
II.3.4.2. Modèle Dancé (1992) appliqué au modèle dynamique de rotation.....	119
II.3.4.2.1. Définition des paramètres de la géométrie d'engrènement	119
II.3.4.2.2. Modèle de répartition des charges sur les dents engrénées.....	123
II.3.5. 4 ^{EME} MODULE : CALCUL DES RAIDEURS ET AMORTISSEMENTS ÉQUIVALENTS POUR LE MODÈLE FINAL.....	131
II.3.5.1. Raideurs et amortissements équivalents pour les brins de courroie enroulés	132
II.3.5.2. Raideurs et amortissements équivalents pour les brins libres de courroie et les brins enroulés sur les galets.....	139
II.3.5.3. Passage au modèle final.....	142
II.3.5.3.1. Cas d'un lien entre deux poulies	142
II.3.5.3.2. Cas d'un lien entre une poulie et un galet	144
II.3.5.3.3. Cas d'un lien entre deux galets.....	146
II.3.6. 5 ^{EME} MODULE : RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT	146
II.3.6.1. Établissement des équations du mouvement.....	146
II.3.6.2. Définition des variables du système	147
II.3.6.3. Énergie cinétique d'une poulie	147
II.3.6.4. Torseur d'effort au centre de rotation de chaque palier.....	150
II.3.6.4.1. Efforts extérieurs au système	150
II.3.6.4.2. Efforts simulant l'erreur de transmission cinématique.....	151
II.3.6.4.3. Efforts dus aux variations globales de tension.....	151
II.3.6.5. Travaux virtuels dus aux paliers.....	151
II.3.6.6. Travaux virtuels dus aux brins "globaux".....	152
II.3.6.7. Travail virtuel du tendeur.....	153
II.3.6.8. Réduction du système dans le cas de l'utilisation d'un tendeur.....	156
II.3.6.9. Énergie cinétique du balourd	158
II.3.6.10. Énergie cinétique d'un pas de brin enroulé sur une poulie.....	159
II.3.6.11. Énergie cinétique d'un pas de courroie d'un brin libre.....	160
II.3.6.12. Résolution des équations du mouvement.....	161
II.3.7. SORTIES DU MODÈLE	162
II.4. CONCLUSION.....	162

II.1. Introduction

L'objectif de la thèse est de développer un modèle complet permettant d'étudier l'influence sur le comportement dynamique de la transmission d'un grand nombre de paramètres. Tous les modèles examinés dans la bibliographie (chapitre I.2) ont une approche globale. C'est-à-dire, seuls les "macro-paramètres" tels que l'angle de rotation θ et la tension dans les brins T , décrivant l'état global de la transmission, sont étudiés. En tant que non-spécialiste des transmissions par courroie dentée, les acousticiens et les fiabilistes suivent généralement cette première approche en considérant la tension T . Cependant, une approche locale, ou fine, apporte d'avantage d'indications. Des "micro-paramètres", tels que la charge sur chaque dent de courroie engrenée, peuvent être examinés en relation avec les "macro-paramètres", comme la tension, en ce qui concerne la charge sur les dents. Cette démarche est celle suivie par K. W. Dalgarno et T. H. C. Childs. Ceux-ci concluent au terme d'une étude sur les paramètres influant la durée de vie d'une courroie dentée, que la déformation de la première et de la dernière dent de courroie engrenée sur une poulie est un paramètre primordial. Nous adoptons également cette approche locale. Tous les paramètres locaux au niveau des arcs de courroie enroulée (déformation des brins et des dents de courroie) seront calculés au même titre que les "macro-paramètres" (déplacement et rotation des poulies, tension dans les brins). Cette démarche doit apporter en définitive la compréhension du fonctionnement d'une transmission par courroie dentée.

La discussion amenée par une telle démarche doit être faite en toute connaissance des limites de la modélisation. Il convient donc de détailler les hypothèses qui cadreront précisément le modèle. Une analyse exhaustive sera effectuée au chapitre II.2 afin de retenir un certain nombre d'hypothèses pertinentes pour la compréhension et la simulation du fonctionnement d'une transmission par courroie dentée.

Une fois le contexte de l'étude défini, la structure du programme sera détaillée au chapitre II.3. Les sous-chapitres développeront la modélisation concernant chaque partie du programme et en particulier : (1) le calcul itératif non-linéaire des tensions dans les brins libres, (2) le calcul itératif des tensions dans les brins enroulés sur les poulies dentées en liaison avec la charge sur les dents de courroie, (3) et l'élaboration de "brins globaux" prenant en compte un brin libre de courroie et les deux brins enroulés sur les deux poulies adjacentes.

II.2. Hypothèses de travail

Des propositions sont maintenant énoncées et discutées pour encadrer la modélisation dans des limites cohérentes et pas trop complexes.

II.2.1. La courroie

II.2.1.1. Caractéristiques géométriques de la courroie

La géométrie de la courroie est loin d'être parfaite. J.-M. Dancé (1992) a mesuré les

caractéristiques géométrique d'une courroie avec un projecteur de profil. Certains paramètres ont jusqu'à 30 % d'écart avec les valeurs normales. D'autre part, ces paramètres ne sont pas constant tout au long de la courroie. Par exemple, M. Kagotani (1993) a suivi l'évolution du pas de courroie dont la valeur normale est 9.525 mm. Les écarts importants enregistrés et visualisés sur la figure II.1 sont imputés au processus de fabrication et à la variation de l'épaisseur du Nylon recouvrant la courroie.

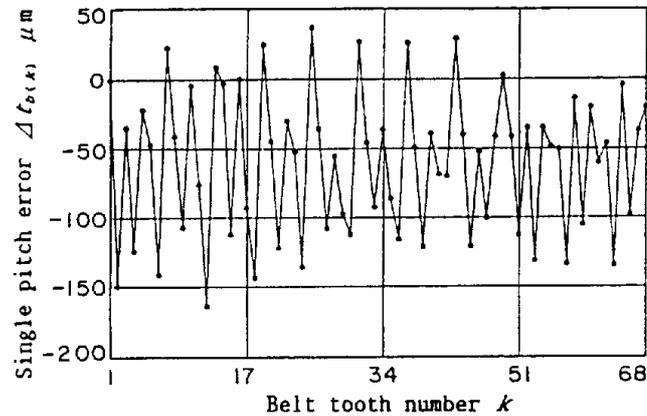


Figure II. 1 : Variation du pas pour une courroie de 68 dents enroulée sur une poulie de 18 dents [Kagotani et al., 1993].

Les implications sur l'erreur de transmission quasi-statique sont connus. M. Kagotani attribue la variation de pas, la variation de la section du câblage, et la variation du facteur d'élasticité du câblage à une erreur de transmission typique dont la période est celle de la révolution de la courroie (figure II.2). Néanmoins, les effets des imperfections de la courroie ne sont pas connus sur l'erreur de transmission dynamique. En revanche, H. Tokoro et al. (1997) quantifie la part de l'effet de l'hétérogénéité longitudinale de la courroie à 30 N. sur une amplitude de variation de tension en dynamique de 270 N. En conséquence, l'erreur de transmission quasi-statique due aux imperfections de la courroie sera prise en compte (Annexe V - chapitre I.3 - questions 13 et 14).

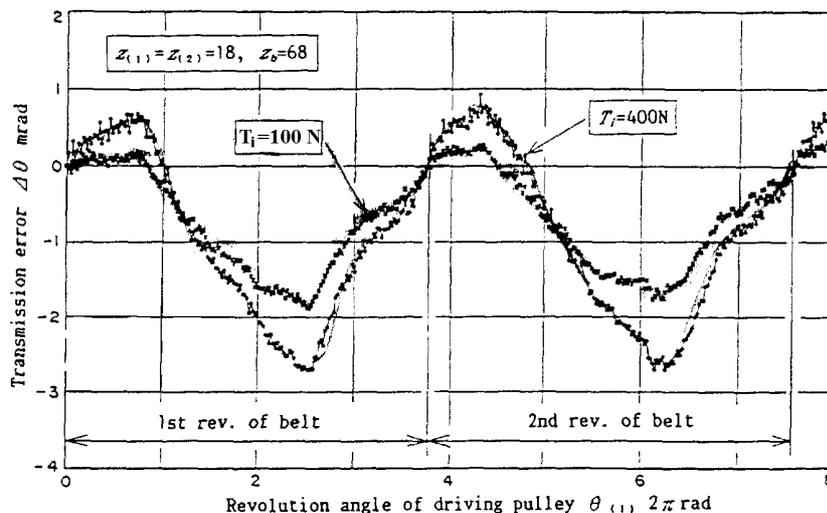


Figure II. 2 : Mesure de l'erreur de transmission cinématique due à l'imperfection de la courroie pour deux tension de pose 100 et 400 N. [Kagotani, et al.].

II.2.1.2. *Forme des brins libres de la courroie*

La raideur en flexion de la courroie impose sur les brins libres une forme apparentée à une chaînette (figure II.25 page 115). Suite à la validation du calcul des tensions dans les brins, il est apparu nécessaire de tenir compte de la forme non-rectiligne de la courroie. En effet, lorsque la tension est faible dans le brin, celui-ci reste tendu grâce à la raideur de flexion. D. L. Waugh et al. (1980) soulignent aussi la nécessité de considérer la raideur de flexion et G. Gerbert (1991) en tient compte pour un calcul élémentaire de tension autour d'une poulie. Une bibliographie exhaustive sur la forme du brin est présentée au chapitre II.II.3.3.2. Par contre, nous pouvons remarquer que tous les modèles de rotation détaillés au premier chapitre considère les brins libres droits. En effet, seule la longueur du brin est utile (pour calculer la raideur du brin) dans un modèle de rotation. La longueur du brin droit est une bonne approximation de la longueur de la chaînette si la tension est suffisante. D'autre part, si la tension est insuffisante, il peut se produire le phénomène du saut de dent. Nous pouvons donc simplifier le modèle de rotation en considérant des brins droits.

II.2.1.3. *Caractéristiques mécaniques de la courroie*

II.2.1.3.1. *Raideur de l'âme de la courroie*

La grande raideur de l'âme est due au câblage. La mesure de la raideur est faite sur une machine de traction classique (chapitre III.4.1.1.4). Selon des mesures précises effectuées par J.-M. Dancé (1992), la raideur longitudinale de la courroie est linéaire (figure II.3). On peut toutefois remarquer que M. Atouf (1992) obtient une raideur d'âme très faiblement non-linéaire par une mesure speckle sur deux pas de courroie HTD. La raideur sera considéré comme constante tout au long de la courroie bien que le câblage ne soit pas homogène.

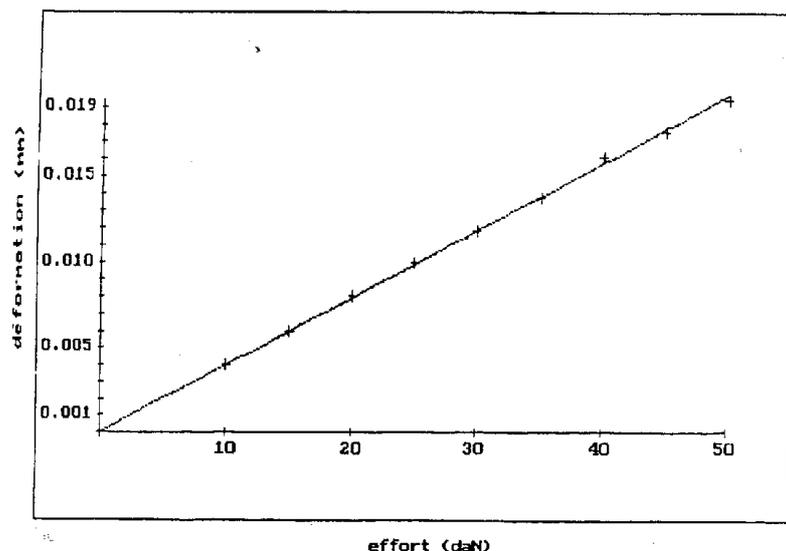


Figure II. 3 : Loi d'allongement d'un pas de courroie [Dancé, 1992].

Le raidissement dynamique ne sera pas considéré dans cette étude. C. Debbabi (1990) a tenté d'établir une loi d'évolution du module dynamique en fonction de divers facteurs mais a dû renoncer. Le module dynamique est sensible principalement à la fréquence et à l'amplitude de

l'excitation, mais surtout à la température interne au polymère (vrai aussi pour le module statique). Le facteur température ne sera pas pris en compte non plus lors de cette étude, bien qu'il soit très important. La figure II.4 illustre les variations importantes du module de Young mesurées par Jakowluk et Dudziak (1975) en fonction de la température sur une courroie à section trapézoïdale.

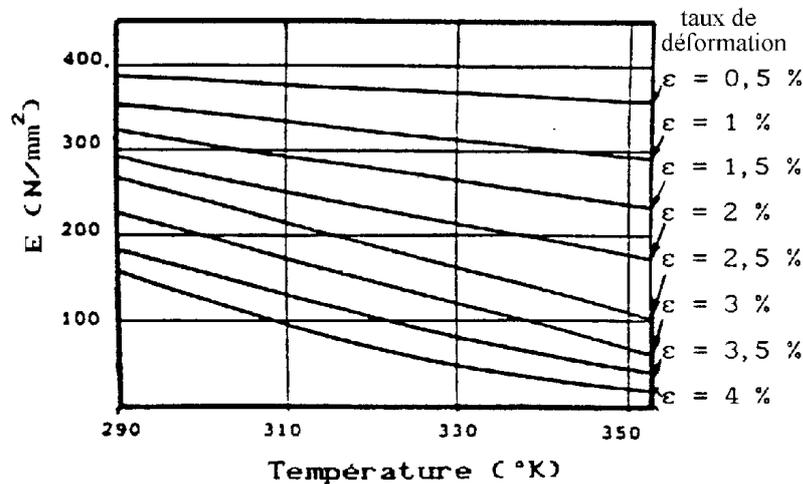


Figure II. 4 : Évolution du module d'élasticité d'une courroie trapézoïdale en fonction de la température, pour différentes amplitudes d'excitation [Jakowluk & Dudziak, 1975].

II.2.1.3.2. Raideur d'une dent de courroie

La plupart des auteurs de la littérature utilisent une raideur de dent linéaire. J.-M. Dancé montre l'importance sur la répartition des charges sur un arc de courroie enroulée, d'utiliser une raideur non linéaire (figure II.5). D'autres mesures montrent un assouplissement important de la dent avec la charge longitudinale (Fig. III.14). Il importe donc d'utiliser une raideur non linéaire.

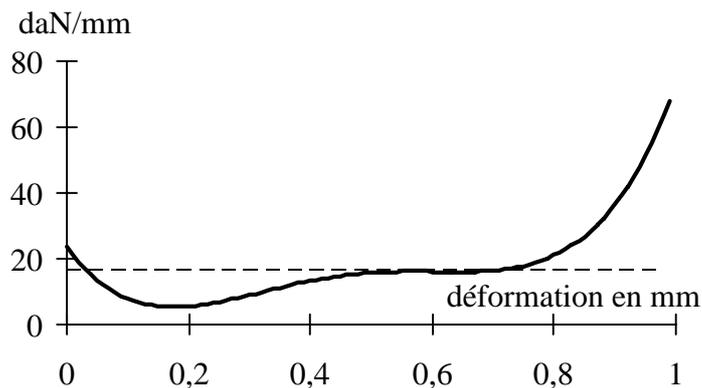


Figure II. 5 : Raideur linéaire et non-linéaire d'une dent de profil H.T.D. [Dancé, 1992].

Toute les dents suivront la même loi de raideur dans le modèle développé. La loi de raideur prendra en compte le paramètre de déformation de la dent tel que l'a explicité J.-M. Dancé. La validation statique du modèle a mis en lumière la nécessité de considérer un deuxième

paramètre: la pression radiale ou normale exercée sur la dent. N. Mizuno et al. avaient déjà décelé un résultat similaire (figure I.50) en faisant varier la tension de pose. Ainsi, chaque dent aura une raideur différente. Comme pour l'âme, le raidissement dynamique ne sera pas considéré. La température est un autre facteur important. La figure II.6 illustre les variations de la raideur de dent de six types de courroies (géométrie identique mais matériaux différents) dans une gamme de température qu'on peut retrouver sous un capotage de transmission par courroie dentée de distribution de moteur automobile. Nous constatons globalement 50 % de variation de la raideur. Cette sensibilité à la température de la raideur de dent ne sera pas prise en compte mais il est important de garder à l'esprit cet aspect lors d'une validation sur un moteur automobile.

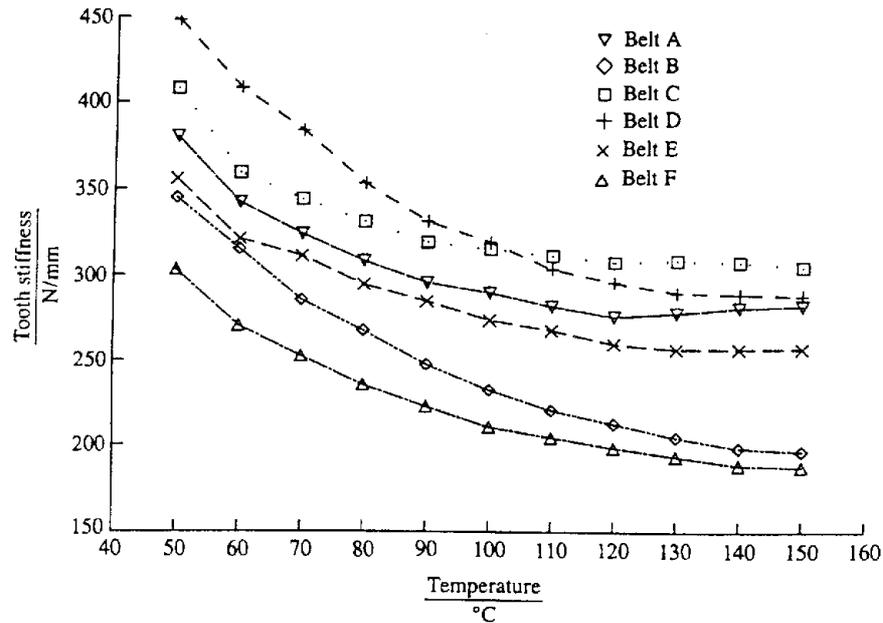


Figure II. 6 : Raideur de dent en fonction de la température pour six types de courroie (pas de 5.525 mm avec six types d'élastomère différents pour le corps et deux types de tissu protecteur en Nylon) [Dalgarno, 1994 (a)].

II.2.1.3.3. Amortissement de la courroie

Les dissipations viennent des frottements internes au polychloroprène du corps de la courroie, et des frottements entre les éléments constitutifs de la courroie. Il en résulte un amortissement essentiellement structural du matériaux. Connaître les caractéristiques d'amortissement (structural et visqueux) du polymère en situation réaliste nécessiterait une expérimentation longue et coûteuse. La plupart des auteurs résolvent le problème en adoptant un facteur d'amortissement visqueux équivalent caractérisant l'ensemble des forces de frottement interne. La même démarche sera suivie pour la modélisation dans cette étude. On peut aussi noter la remarque de S. Abrate (1986) sur l'absence d'étude sur l'amortissement longitudinal de la courroie.

II.2.1.3.4. Inertie de la courroie

Quelques auteurs ([Mote, 1965], [Beikmann et al., 1997]) tiennent compte de l'impact de l'inertie de la courroie sur la tension dans une courroie. La force centrifuge provoque un décollement de la partie de la courroie enroulée sur une poulie et s'oppose à la tension de la courroie. Il s'en suit une baisse de la tension effective sur la poulie. La tension effective (ou

appelée tension de traction) est la tension plaquant la courroie sur la poulie et qui permet seule la transmission du couple par adhérence pour les courroies plates, trapézoïdale et Poly-V. Cette diminution de la tension effective est uniforme sur toute la courroie et correspond à la tension centrifuge (annexe IV) :

$$T_{\text{centrifuge}} = mc^2 \quad \text{Equ. II. 1}$$

où m est la masse linéique de la courroie et c , sa vitesse linéaire.

Pour vérifier l'influence de la tension centrifuge, nous considérons une courroie DAYCO de type ISORAN[®] et un pas de 8 mm, enroulée sur une poulie de rayon primitif 60 mm. Sa masse linéique est de 0.155 kg/m (Tableau III.1). La part de la tension centrifuge dans la tension totale dans la courroie est alors de 6 N. à 1000 tr/mn. et de 221 N. à 6000 tr/mn. La tension centrifuge ne peut donc être négligée.

Le modèle dynamique développé ici considère des paliers souples (chapitre II.II.2.2.1). Le décollement de la courroie sur les poulies entraîne un déplacement des poulies du côté où la courroie s'enroule et par conséquent, une augmentation uniforme sur toute la courroie de la tension effective compensant la force centrifuge. L'un des rôles du tendeur qu'on peut considérer comme un palier très souple est justement de rattraper la baisse de la tension effective en augmentant la tension de pose, c'est-à-dire la partie de la tension uniforme sur toute la courroie [Beikmann et al., 1997]. L'influence de l'inertie de la courroie sur les paliers sera donc prise en compte au chapitre II.II.3.6.4.3. Le couplage inertiel entre les poulies et la courroie sera également considéré. On peut noter que la force centrifuge a de surcroît une influence sur la forme courbe des brins libres abordée au chapitre précédent, mais ne sera pas prise en compte.

II.2.1.4. Vibrations transversales des brins de courroie

Les brins libres de la courroie vibrent transversalement en permanence excités par l'effet polygonal et l'excentricité des poulies qui agissent comme un piston aux extrémités des brins. Cependant, les variations de tension causées par la rotation des poulies sont une cause majeure d'excitation des brins en transversales.

En effet, si on considère l'équilibre d'un segment infinitésimal de poutre en translation à vitesse constante, le mouvement vertical w vérifie :

$$-\frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_0^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{w} \right] - v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - k\dot{w} = 0 \quad [\text{Harrison, 1992}]$$

avec $w(x,t)$	déplacement vertical d'un point du brin,
x	abscisse axiale,
k	amortissement,
EI	raideur longitudinale,
μ	masse linéique,
$c_0^2 = (aT_0 + EI\pi) / \mu a$	célérité d'onde du brin,
v	vitesse axiale constante.

Dans le cas où $\mu c_0^2 \gg EI$ et $c_0 \gg v$, nous pouvons introduire une variation de tension à une fréquence double de la fréquence naturelle du brin :

$$T(t) = T_0 + \Delta T_0 \cos 2\omega t$$

Avec une solution particulière non-forcée,

$$w(x, t) = A_m \sin \lambda x \phi(t)$$

nous aboutissons à une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + r \frac{d\phi}{dz} + (p + q \cos z) \phi = 0$$

$$\text{avec } z = 2\omega t$$

$$\lambda = m\pi a$$

$$p = (c_0 \lambda / 2\omega)^2$$

$$q = p(\Delta T_0 / T_0)$$

$$r = k / (2\omega)^2$$

Cette équation est notable car c'est une équation dite de Mathieu (annexe I). Il n'est donc pas surprenant que A. Harrison (1992) mesure un mouvement transversal de bande transporteuse (analogue aux courroies de transmission) cahotique. La figure II.7 montre le caractère imprévisible des vibrations de chaque brin d'une bande porteuse en fonction du temps, ce qui certifie expérimentalement le couplage entre les vibrations en rotation des poulies et transversales des brins.

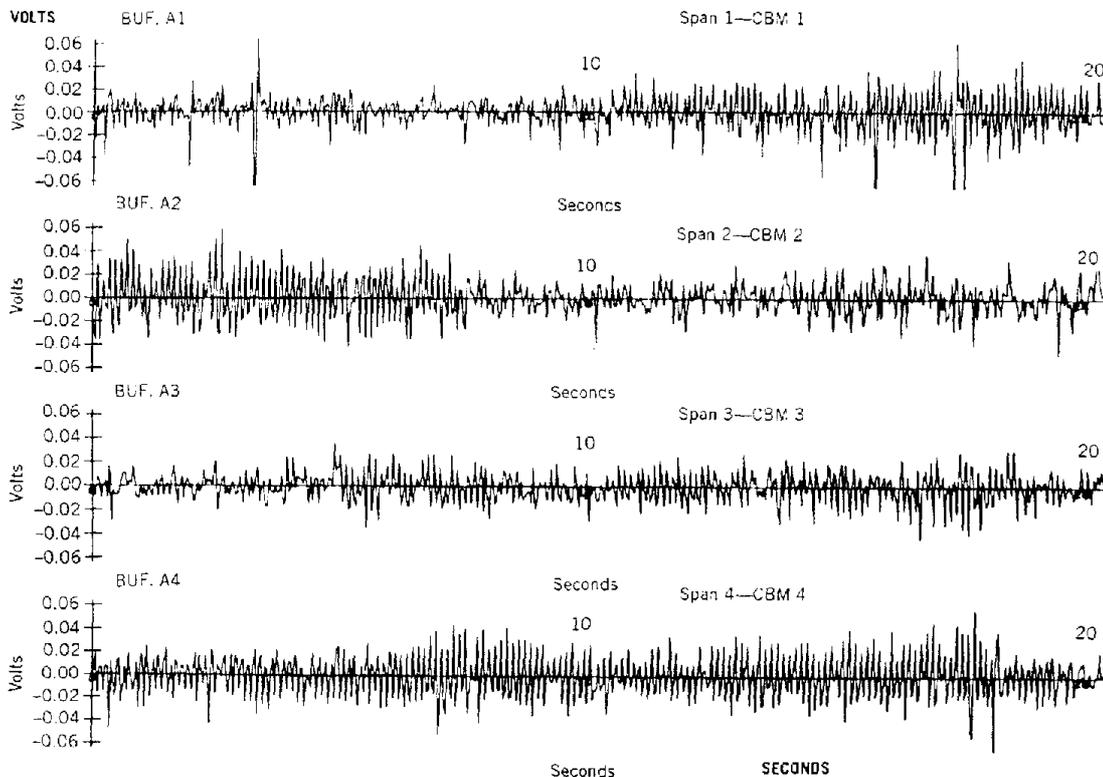


Figure II. 7 : Enregistrement pendant 20 secondes sur quatre brins d'une bande transporteuse du mouvement transversal qui se révèle cahotique [Harrison, 1992].

Cependant, la question se pose : Quel impact ont les vibrations transversales sur la rotation des poulies ? R. S. Beikmann et al. (1996 a) montrent que des transferts d'énergie se font entre les deux types de mouvement (figure I.39). Toutefois, ces transferts ne se font qu'à certaines fréquences de rotation (phénomène de *curve veering* encadré sur la figure I.37). En dehors de ces zones de transfert d'énergie, les modes de fonctionnement sont bien typés rotation ou transversal (table I.4). On peut donc considérer que les modes sont découplés. Le modèle de rotation développé durant ce travail reprend l'hypothèse de découplage des vibrations transversales et de rotation. Néanmoins, l'expérimentateur qui confronte le modèle aux mesures de rotation sur une transmission de distribution automobile doit garder à l'esprit la possibilité de couplage linéaire et non-linéaire entre les vibrations transversales et de rotation.

Nous pouvons aussi remarquer que la méthode modale utilisé par R. S. Beikmann (1992) n'est pas applicable sur les transmissions par courroie dentée en raison de la complexité accrue de ce type de transmission. Le modèle de rotation est fortement non-linéaire à cause du comportement de la denture (équation I.117). D'autre part, contrairement aux transmissions serpentines par courroie Poly-V, les variations de couples aux arbres à cames sont très fortes par rapport au couple moyen (chapitre IV.2). Il n'est donc pas possible de déterminer une position d'équilibre moyenne à partir de laquelle on définit les modes du système linéarisé, pour calculer ensuite de *petits* déplacements autour de la position d'équilibre.

II.2.1.5. Vibrations longitudinales des brins de courroie

R. S. Beikmann (1992) montre l'absence d'interaction des vibrations longitudinales avec les autres types de vibrations (équation I.59). Les vibrations longitudinales n'ont donc pas lieu d'être dans notre modèle de rotation.

II.2.2. La poulie

II.2.2.1. Élasticité des supports

Les professionnels de la réparation automobile savent que l'usure des paliers et en particulier des galets provoque une usure prématurée de la courroie de distribution [Auto-Plus, 1996]. Il est donc conseillé de changer les galets à chaque changement de courroie. D'autre part, une étude sur les transmissions par engrenages montre qu'une partie significative de l'énergie vibratoire passe par les paliers [Bourdon et al.]. Dans le cadre des transmissions par courroie dentée, l'élasticité des paliers et des carters ainsi que la flexion des arbres de poulies peuvent introduire des variations d'entr'axes dont les effets sur le comportement dynamique et notamment sur les variations de tension, restent inconnus. C. D. Mote (1965) avait montré l'impact de l'élasticité des paliers sur les vibrations transversales mais rien n'a été fait sur les vibrations en rotation. Cet aspect sera donc pris en compte dans le modèle par des raideurs et des amortissements de paliers (chapitre II.II.3.6.5). Le comportement est considéré comme linéaire bien que ce ne soit généralement pas le cas, en particulier avec les paliers fluides. Les variations d'entr'axes dues à la dilatation thermique sont prises en compte par des forces s'exerçant sur les paliers.

II.2.2.2. La géométrie des poulies

Par construction, les poulies dentées présentent nombre de défauts. Nous conviendrons

néanmoins que le profil de la denture est parfait et que son pas reste constant. Nous considérons que la poulie et le galet est infiniment rigide comparé à la souplesse du palier. D'autre part, certains défauts présentés dans les deux chapitres suivants ne peuvent être escamotés de la modélisation.

II.2.2.2.1. L'excentricité

L'excentricité des poulies, c'est-à-dire la distance entre le centre de rotation et le centre de la poulie, intervient à la fois sur la rotation des poulies et sur les efforts aux paliers.

◆ Effet sur la rotation

L'excentricité est la cause majeure de l'erreur de transmission quasi-statique. Elle se reconnaît à sa fréquence qui est une combinaison linéaire des fréquences de rotation des différentes poulies et galets. La figure II.8 illustre l'erreur de transmission quasi-statique dans le cas d'une transmission à deux poulies de rapport de transmission 1:1. On observe clairement que l'erreur de transmission a une période de révolution due au tour poulie. L'erreur de transmission peut aussi devenir considérable dans certaines conditions de déphasage de l'excentricité entre les différentes poulies. Une mesure expérimentale de cette erreur de transmission introduite dans le modèle dynamique, permettra de tenir compte de ses effets sur la position angulaire des poulies.

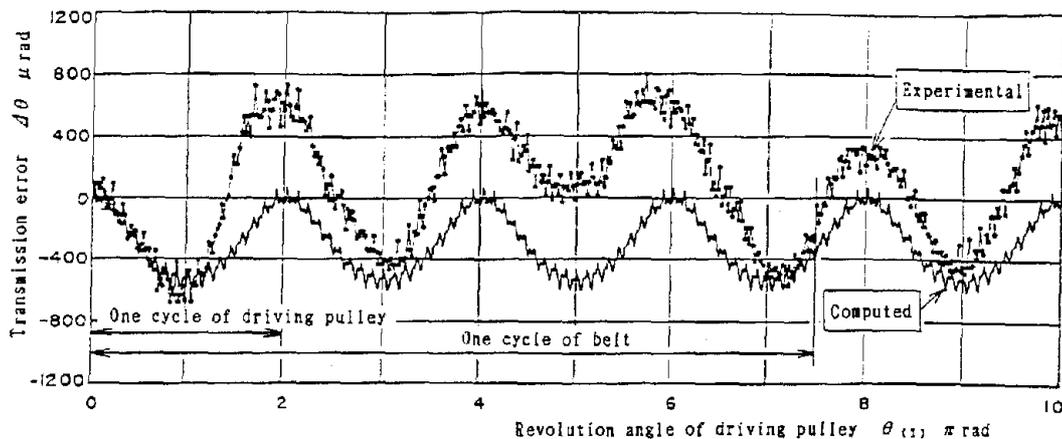


Figure II. 8 : Erreur de transmission mesurée et calculée due à l'excentricité des poulies [Kagotani, 1991].

◆ Effets sur les paliers et la courroie

L'excentricité des poulies provoque un allongement de la courroie. Il en résulte un effort important au niveau des paliers. La mesure au laboratoire de ces efforts grâce à des capteurs de force piézo-électrique 3D placés sous les paliers, permet de remonter à la variation des efforts dans la courroie. La figure II.9 montre des variations notables de la tension de pose. L'écart de tension peut atteindre 55 Newton pour une excentricité de l'ordre de 40 μm . H. Tokoro et al. (1997) quantifie en dynamique, pour leur part, la part de l'excentricité des poulies à 0.6 N./ μm sur une variation totale de tension de 270 N. En conséquence, ces variations de tension sont imposées en entrée dans le modèle (Annexe V - chapitre I.3 - Demande 15).

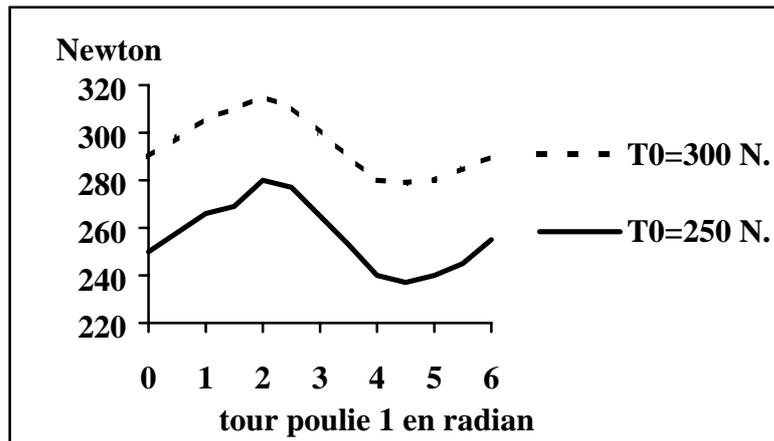


Figure II. 9 : Variation de la tension de pose T_0 en régime de rotation quasi-statique.

II.2.2.2. Le balourd

Les masses tournantes d'un système mécanique ne sont jamais parfaitement équilibrées. Le centre de masse de la poulie (et de son arbre) sont en général différent de son centre de rotation. Il en résulte une vibration au niveau du palier concerné, mais que la courroie retransmet sur les autres paliers. La figure II.10 illustre un ventilateur sur un site industriel entraîné par un moteur électrique par l'intermédiaire d'une courroie Poly-V. Un capteur horizontal placé sur le moteur enregistre l'accélération due aux balourd de la poulie du ventilateur. D'autre part, un capteur placé verticalement enregistre aussi d'une manière très nette (figure II.11) le balourd de la poulie du ventilateur. Ce résultat inattendu montre la complexité des phénomènes dynamiques de la transmission notamment dus au balourd. Cet aspect sera considéré dans la modélisation afin de comprendre l'influence du balourd (chapitre II.II.3.6.9).

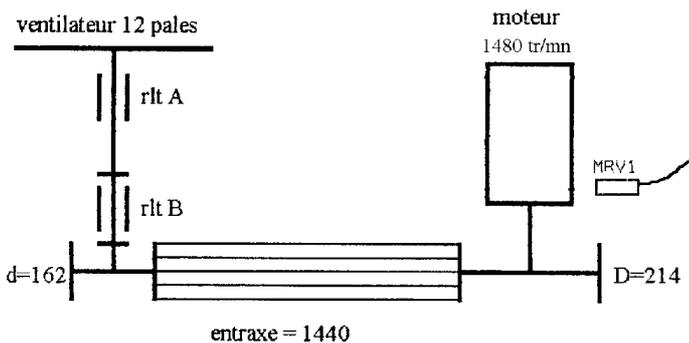
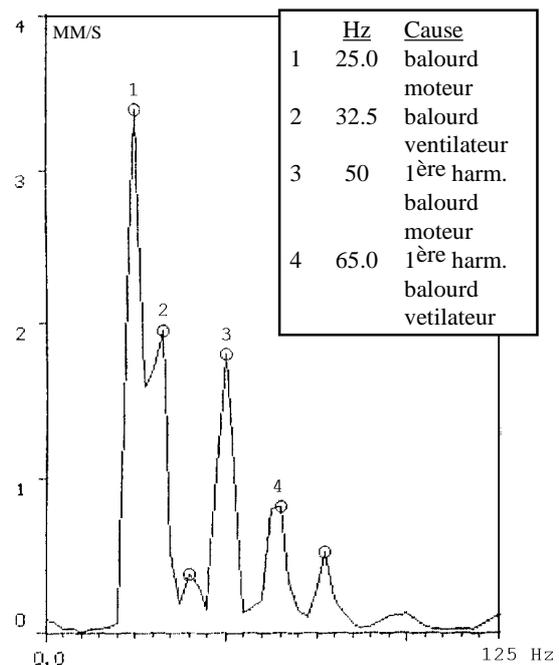


Figure II. 10 : Schéma cinématique d'une transmission par courroie Poly-V.

Figure II. 11 : Spectre en fréquence du signal de l'accéléromètre MRV1 placé en position vertical. ➔



II.2.2.2.3. L'effet polygonal

L'enroulement de la courroie sur une poulie ne se fait pas sur un cercle parfait. En réalité, le profil de la poulie dentée s'apparente d'avantage à un polygone. En affinant, J.-M. Dancé (1992) distingue trois phases d'engrènement sur la poulie (figure II.12) :

- Phase 1 : La courroie s'enroule sur le diamètre extérieur de la poulie (arc CD de la figure II.12).
- Phase 2 : La courroie s'enroule autour du rayon de raccordement (arc DE de la figure II.12) entre le diamètre extérieur et le creux de dent.
- Phase 3 : La courroie s'enroule autour du rayon de raccordement (arc BC de la figure II.12) opposé au précédent.

Durant les deux dernières phases, le rayon d'enroulement r_i de la courroie varie. Or, l'erreur de transmission quasi-statique ($\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i1} r_1 / r_i$) dépend du rayon d'enroulement d'où un écart angulaire dû à l'effet polygonal.

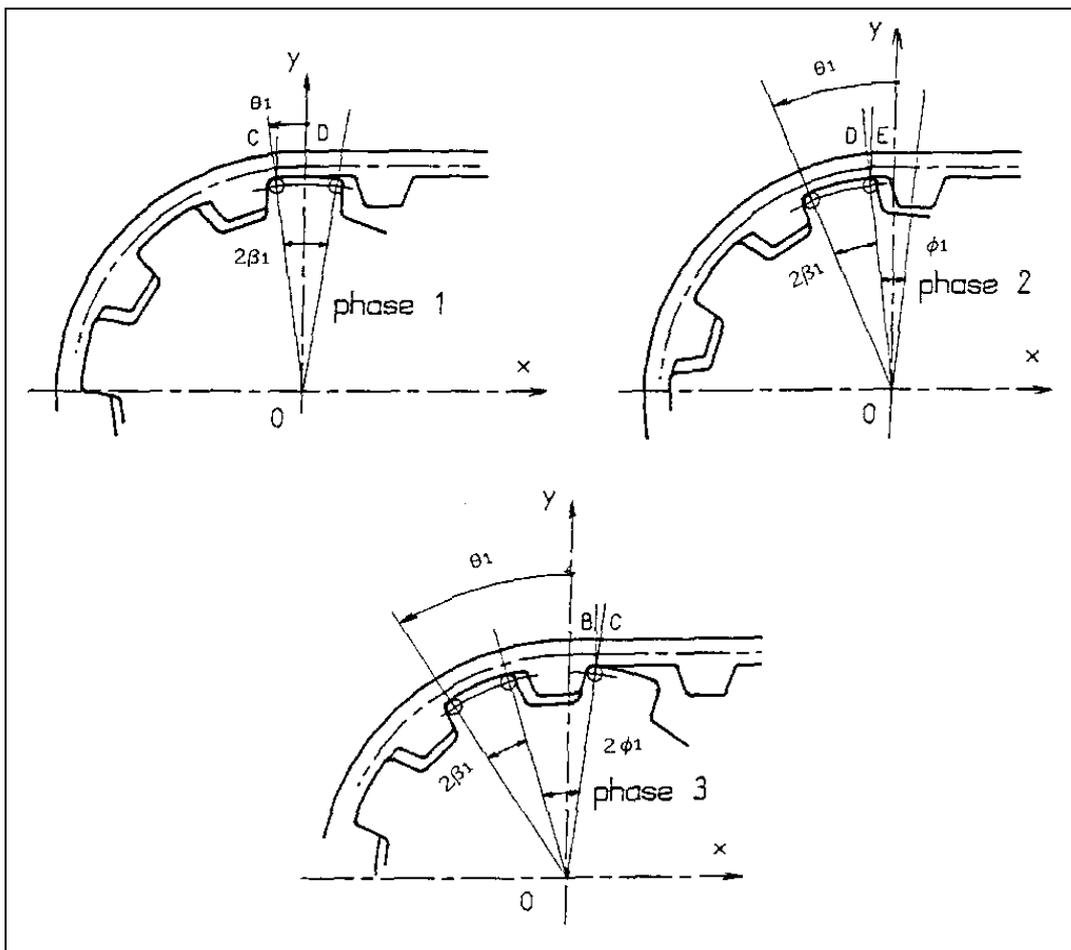


Figure II. 12 : Définition des trois phases d'engrènement [Dancé, 1992].

Le passage de la phase 2 à la phase 3 provoque un raccourcissement de la longueur du brin de courroie. Cette différence entraîne une élévation de la courroie qui entre en jeu dans

l'erreur de transmission.. M. Kagotani (1983) met en évidence par des calculs les deux phénomènes associés de l'effet polygonal et de l'élongation du brin dans l'erreur de transmission. La figure II.13 représente, sur la rotation d'un angle de pas de la poulie menée, l'erreur de transmission globale (figure II.13 b), la contribution de l'effet polygonal (figure II.13 c) et la contribution des déformations (figure II.13 a). L'étude de M. Kagotani s'effectue en quasi-statique. Il est donc intéressant d'inclure dans la modélisation l'erreur de transmission quasi-statique pour en étudier les répercussions sur le plan dynamique.

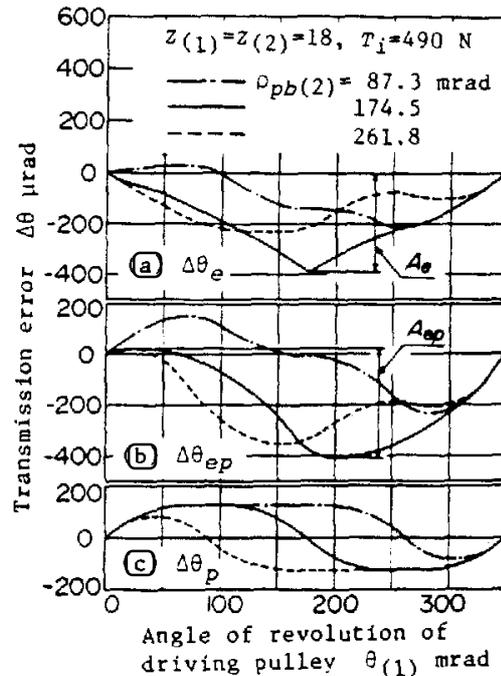


Figure II. 13 : Erreur de transmission due à l'effet polygonal et à l'élongation de la courroie [Kagotani, 1983].

II.2.2.3. Frottement poulie-courroie

La transmission de l'effort entre la poulie et la courroie se fait par obstacle (dent) mais aussi par adhérence sur le rayon extérieur de la poulie. Le frottement est à l'origine de l'adhérence. On distingue deux types de frottement: (1) Un frottement (ou adhérence) statique, et (2) un frottement (ou glissement) dynamique se produisant lorsqu'il y a perte d'adhérence. On distingue à nouveau deux types de glissement: (1) Le glissement fonctionnel, et (2) le patinage.

Le glissement fonctionnel est principalement dû à l'élasticité de la courroie. En effet, une poulie soumise à un couple à un brin tendu M et un brin mou N . Le brin le plus tendu subit un allongement; alors que la partie du brin enroulé sur le côté opposé subit une contraction. La longueur par unité de masse du brin M devient supérieure à celle du brin N . Dans ces conditions, pour, qu'à un instant et en un point donnés, défile une masse de courroie constante, il faut que la vitesse linéaire du brin M soit supérieure à celle du brin N . Le passage d'une vitesse à l'autre s'effectue donc sur la poulie et entraîne un mouvement relatif par rapport à la poulie, d'où le glissement fonctionnel. Ce phénomène est accentué par les variations de couple et les effets d'inertie. Le glissement fonctionnel est souvent exprimé selon un taux (en %) qui est le rapport entre la vitesse de glissement et celle de la poulie. Le patinage apparaît lorsque généralement le taux de glissement dépasse 1 %.

La complexité des propriétés tribologiques du caoutchouc et des conditions de fonctionnement (illustrées dans le tableau II.1) entraîne une méconnaissance de la loi de glissement de la courroie sur la poulie. Par conséquent, C. Debbabi et al. (1990) mesurent, pour les transmissions par courroie Poly-V, le glissement fonctionnel entre la courroie et la poulie (figure II.14) pour en tirer une loi "semi-expérimentale" (équation I.53).

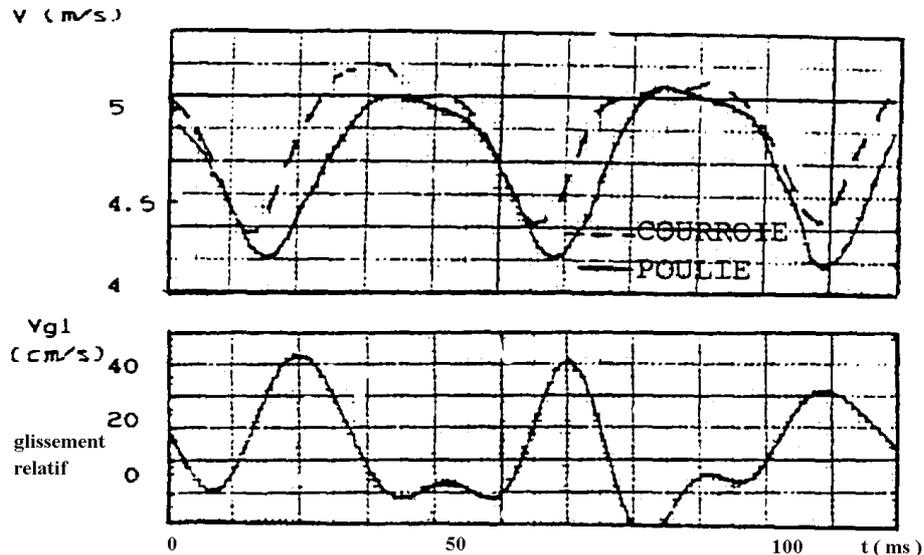


Figure II. 14 : Vitesses linéaires de la courroie et de la poulie de l'alternateur; vitesse de glissement de la courroie [debbabi et al.].

Conditions de fonctionnement	Propriétés mécaniques des surfaces en contact	Autres facteurs
<ul style="list-style-type: none"> • surface réelle de contact • effort normal (pression) • vitesse de glissement • température • degré d'humidité • durée de contact 	<ul style="list-style-type: none"> • rugosités • module d'élasticité • contrainte de cisaillement • propriétés visco-élastique 	<ul style="list-style-type: none"> • degré de cristallinité • contaminations diverses <ul style="list-style-type: none"> ◇ eau ◇ oxydes ◇ lubrifiants ◇ poussières ◇ débris d'usure

Tableau II. 1 : Facteurs intervenant dans la loi de frottement [Debbabi et al.].

C. Debbabi constate que le coefficient de frottement augmente avec l'augmentation de la vitesse de glissement et avec la diminution de la pression de contact. Il simplifie la loi de frottement dynamique en ne gardant que les deux paramètres précités qu'il juge prépondérant. Toutefois, ces constatations sur la loi de frottement ne peuvent s'appliquer sur les courroies dentées. En effet, ces courroies possèdent un revêtement de Nylon (figure I.2) dont les propriétés tribologiques sont très différentes de celles du caoutchouc. Nous remarquons également que les autres auteurs ayant étudiés les courroies Poly-V, considèrent qu'il n'y a pas de glissement entre la courroie et la poulie.

Dans les transmissions par courroie dentée, les galets sont au contact avec le dos de la courroie. Normalement, ces galets sont fous (ou libres) entraînant une faible différence de tension dans les brins adjacents. On peut donc tout à fait considérer une adhérence entre les galets et le

dos de la courroie dentée.

Le problème pour les poulies dentées est différent. La présence des dents de courroie empêche à priori le patinage de la courroie sur le sommet de la dent de poulie. Le glissement fonctionnel n'est pas non plus forcément présent bien qu'on ait un brin tendu et un brin mou. En effet, la courroie ne patinant pas, le glissement fonctionnel ne se fait que sur une partie de l'arc d'enroulement sur la dent de poulie (arc AD sur la figure II.30 page 120). Cette partie de l'arc peut être insignifiante si la différence de tension n'est pas suffisante entre deux pas de courroie (cela ne dépasse jamais quelque Newton). Toutefois, tous les auteurs de modèle de répartition des tension dans une courroie dentée enroulée sur une poulie considèrent un glissement intégral (c'est-à-dire le patinage ou glissement sur tout l'arc d'enroulement) sur les dents de poulies. Cela est vrai si la différence de tension entre chaque pas de courroie est suffisamment importante. Nous utiliserons quant à nous un modèle de répartition des tension dans une courroie dentée avec un angle de glissement fonctionnel qu'il suffira d'adapter en fonction des couples employés.

La loi simple d'Euler (rappelée à l'annexe IV) est utilisée pour modéliser le glissement fonctionnel avec un coefficient de frottement constant. Ce coefficient varie de 0.1 à 0.4 selon les auteurs. T. H. C. Childs (et al.) et J.-M. Dancé (1992) différencient en outre la poulie motrice des poulies réceptrices par le sens du frottement. Le modèle de répartition de charge sur les dents en prise de J.-M. Dancé sera repris dans notre modèle de rotation en dynamique.

II.2.3. Le tendeur dynamique

Le tendeur dynamique a pour fonction de rattraper les variations de tension dans les brins causées par : (1) Les variations d'entr'axes dues à la dilatation du bâti (le bloc moteur), (2) la baisse de la tension due à l'effet centrifuge de la courroie, (3) les variations de couples et les effets d'inertie, (4) les vibrations transversales non traitées dans cette étude.

Dans les transmissions de distribution automobile, le tendeur est toujours en rotation autour d'un pivot (figure I.18). Pour simplifier le problème, une raideur équivalente de torsion sera considérée prenant en compte la géométrie du système et la raideur du ressort de contrainte du tendeur. Ce tendeur équivalent sera en rotation alors que celui de C. Debbabi (1990) est en translation (chapitre I.2.1.5). La raison vient de la forte variation des couples résistants dans les transmissions par courroie dentée pouvant causer des mouvements du tendeur d'une telle amplitude que la trajectoire ne peut plus être assimilée à une droite.

La bibliographie a montré le comportement non linéaire du tendeur avec notamment un phénomène de "Stick & Slip" (mouvement saccadé), caractéristique du frottement sec mais non considéré dans le modèle. Conformément aux informations pratiques, deux amortissements visqueux seront considérés suivant le sens de déplacement du tendeur. Mais une seule raideur est considérée. La géométrie et le palier du pivot du tendeur sont considérées suffisamment robuste pour ne pas se déformer. C. Debbabi et A. de Lamy signalent que le premier mode de déformation du tendeur est par conception assez élevé pour ne pas se trouver dans la plage de fréquence du fonctionnement du système. Le modèle pourra comporter ou non un tendeur dynamique.

II.2.4. L'action de la pesanteur

Un des avantages des courroies dentées étant leur légèreté, la force de la pesanteur ne sera pas prise en compte.

II.3. Modélisation et Structure du programme

Le programme a une structure modulaire, ou par bloc, présentée en figure II.15. Le problème de la modélisation est ainsi divisé en sous-problèmes. Chaque module du programme (figure II.15) est alors développé et incorporé indépendamment dans le programme. Des programmes déjà existant comme celui du module sur le calcul des charges sur les dents de courroie sont ainsi incorporés et modifiés plus facilement. Le développement informatique, la localisation des erreurs et les interventions ultérieures comme une éventuelle extension du programme sont ainsi facilités par une plus grande souplesse. Mais surtout la modélisation est plus précise car chaque module représente un modèle développé à part. On peut donc aller plus loin dans la finesse de la modélisation nécessaire pour un module mais non nécessaire dans un autre module. Par exemple, le besoin impérieux de prendre en compte la courbure des brins libres de courroie s'est fait sentir pour le calcul de la tension dans ces brins lors de la validation de ce module. Un modèle "tout-en-un" comme celui de S. J. Hwang et al. (chapitre I.2.1.4) n'aurait pas permis l'assimilation de la courbure des brins car il aurait fallu en tenir compte dans *tout* le programme d'où une complexité lourde à gérer. La structure modulaire permet ainsi de découpler les problèmes et d'apporter une réponse propre. Ainsi, le deuxième module permet un calcul fin de la répartition des charges sur les dents de courroie engrenées grâce à un algorithme spécifique. Au contraire, G. Banaszek et al. (1993) considère un modèle élémentaire de répartition des charges sur les dents de courroie (figure I.18) intégré dans un modèle global "tout-en-un" peu évolutif. La modularité permet donc une grande souplesse au niveau de la modélisation, la programmation et les développements ultérieurs.

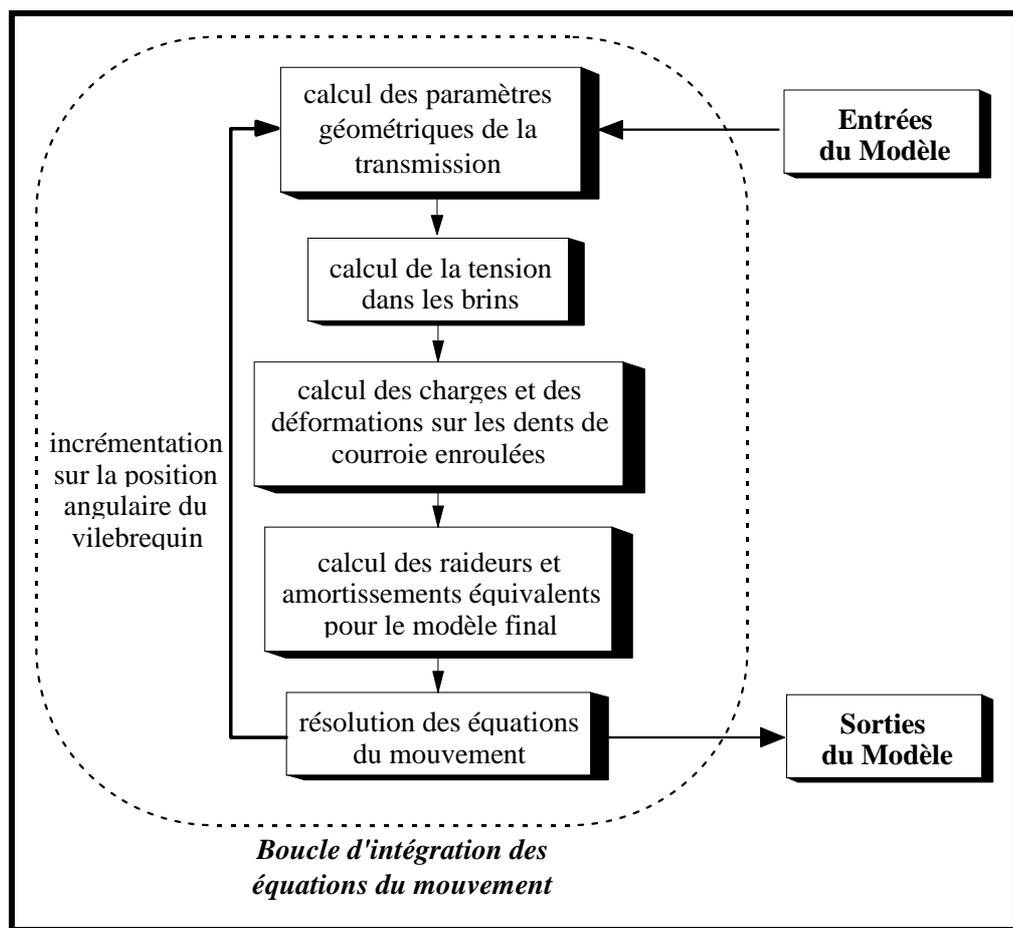


Figure II. 15 : Structure modulaire du programme associé à la modélisation.

Les chapitres suivant décrivent individuellement chaque module du programme associé à

la modélisation.

II.3.1. Entrées du Modèle

Une transmission synchrone se caractérise par des poulies dentées, des galets tendeurs fixes ou mobiles et une courroie dentée. Un arbre moteur entraîne par l'intermédiaire de la courroie des arbres récepteurs. Les galets tendeurs fixes sont placés de manière à augmenter l'angle d'enroulement. La figure II.16 illustre une transmission complexe de distribution de moteur à explosion. La poulie 1, 25 dents est motrice (vilebrequin). Les poulies 3-4 et 6-7 de 25 dents entraîne les quatre arbres à cames des deux culasses. Les roues 2, 5 et 10 sont des galets tendeurs fixes. La roue 8 est un galet tendeur mobile. La poulie 9, 28 dents est liée à la pompe à eau.

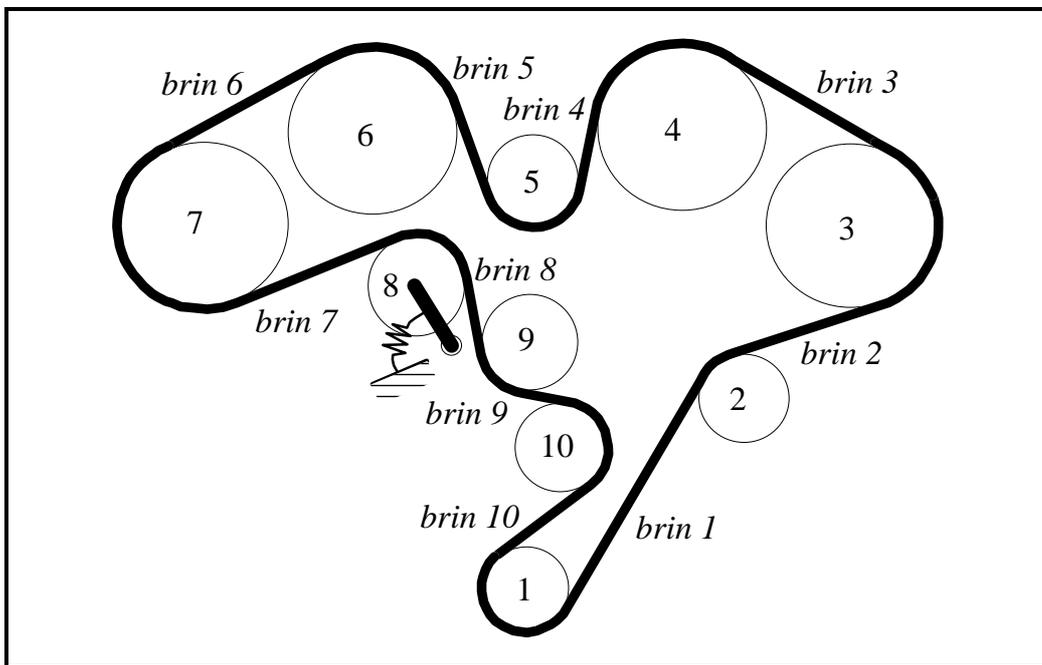


Figure II. 16 : Transmission de la distribution du nouveau V6 PSA-Renault (voir figure I.16).

Le programme demande tous les renseignements nécessaires pour caractériser la transmission sur le plan géométrique, mécanique et sur ses sollicitations. Ceux-ci sont saisis directement par le clavier ou par l'intermédiaire de fichiers (annexe II).

II.3.1.1. Géométrie de la transmission

La position des poulies dentées et des galets est demandée lorsque la courroie est soumise à la tension de pose. Les poulies dentées sont situées à l'intérieur du lacet formé par la courroie et s'appuie donc sur la face dentée de celle-ci. Par contre, les galets sont situés à l'extérieur du lacet formé par la courroie. En connaissant la nature des roues (poulie dentée ou galet) et leur rayon primitif, nous pouvons reconstituer le cheminement de la courroie.

D'autres indications comme le nombre de dent, le pas angulaire, la différence de pas poulie-courroie, le jeu et le coefficient de frottement poulie-courroie sont nécessaires pour calculer la répartition des charges sur les dents de courroie en prise sur une poulie (chapitre

II.II.3.4). Les coordonnées du pivot du tendeur sont également demandées.

La longueur de la courroie au repos est exigée pour le calcul de la tension de pose. Si la transmission dispose d'un tendeur dynamique, le galet du tendeur peut être ajusté pour avoir une tension de pose spécifiée.

En résumé, les entrées caractérisant la transmission sont :

- Nature (galet ou poulie dentée), position et rayon primitif des poulies.
- Nombre de dents, pas angulaire pour les poulies dentées.
- Différence de pas, jeu et coefficient de frottement poulie - courroie.
- Longueur de la courroie non chargée.
- Position du pivot du tendeur.
- Tension de pose initiale de la courroie.

II.3.1.2. Caractéristiques dynamiques

Les masses et les moments d'inertie par rapport à leur axe de rotation pour les poulies et un pas de courroie sont nécessaires pour l'équation du mouvement.

Les lois de déformation d'un pas de l'âme et d'une dent de courroie sont entrées sous forme de polynômes. L'amortissement est aussi requis.

Les raideurs et amortissements des paliers et du tendeur sont également entrés.

En résumé, nous avons :

- Masse et moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.
- Loi de déformation pour les dents et l'âme de la courroie.
- Raideur et amortissement pour les paliers
- Raideur et amortissement non linéaire pour le tendeur.

II.3.1.3. Contraintes extérieures au système

Le mouvement imposé au système, c'est-à-dire la rotation du vilebrequin ajoutée de l'acyclisme est entré sous forme de coefficient de Fourier. Les couples résistants peuvent être saisis sous leur forme temporelle ou par ses coefficients de Fourier. Les calculs sont menés à régime stabilisé.

L'acyclisme cinématique ou quasi-statique θ_{ic} pour chaque poulie i est également une entrée du modèle.

En résumé, nous avons :

- L'acyclisme moteur.
- Les couples résistants (et couple de traînée sur les galets).
- L'erreur de transmission quasi-statique de chaque poulie.

II.3.2. 1^{er} module : Calcul des paramètres géométriques de la transmission

Les poulies de la transmission sont repérés par les coordonnées (x_i, y_i) de leur centre auxquelles on ajoute les variables du mouvement (u_i, v_i) nulles à l'instant initial. La connaissance du rayon primitif permet ensuite de calculer les paramètres géométriques de la transmission (figure II.17 et II.18).

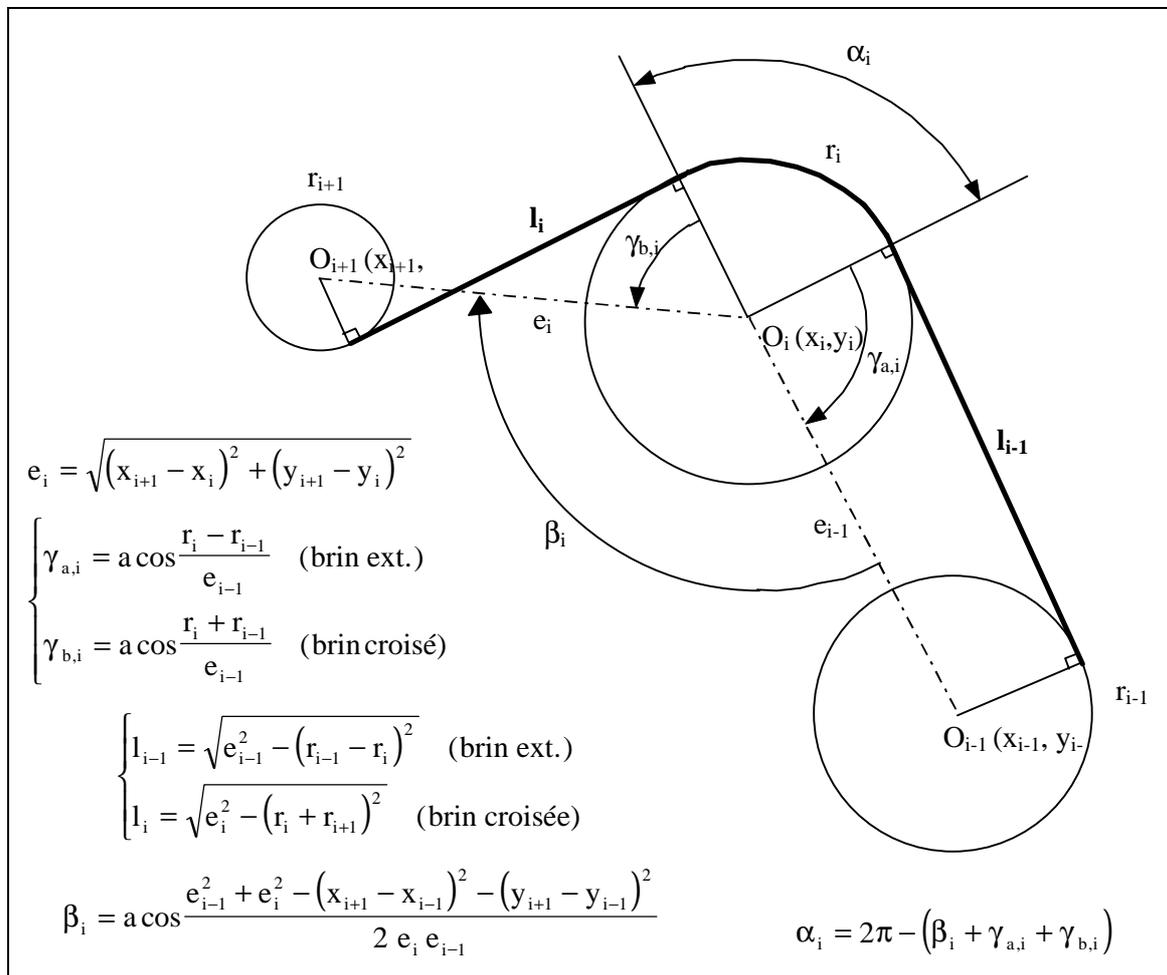


Figure II. 17 : Définition des paramètres géométriques pour un cas type.

La première étape est le calcul des entr'axes e_i . La longueur des brins l_i considérés comme rectiligne est ensuite calculée. On doit distinguer pour cela deux cas : (1) La courroie chemine à l'extérieur de deux poulies consécutives (cas entre la poulie $i-1$ et i de la figure II.17). (2) La courroie se croise entre deux poulies. L'une des deux poulies est à l'intérieur du lacet formé par la courroie tandis que la deuxième est à l'extérieur (cas entre la poulie i et $i+1$). La même

distinction est faite pour le calcul des angles γ_a et γ_b (figure II.17). La connaissance des longueurs l_i et du pas de la courroie permet de calculer le nombre de pas par brin.

L'angle $\beta_i = (\text{O}_{i-1} \text{O}_i \text{O}_{i+1})$ est ensuite calculé pour chaque poulie en s'aidant du produit vectoriel $\text{O}_{i+1} \text{O}_i \wedge \text{O}_{i-1} \text{O}_i$.

L'angle d'enroulement géométrique α_i (à distinguer de l'angle d'enroulement réel tenant compte des zones de décollement - voir la figure II.21) est le complément à 2π des angles β et γ . Si la poulie est à l'extérieur du lacet formé par la courroie, la formule est alors $\alpha_i = \beta_i - \gamma_{a,i} - \gamma_{b,i}$. Connaissant l'angle α_i , le rayon primitif r_i et le pas de la courroie, on est en mesure de calculer le nombre de dents enroulées sur la poulie i .

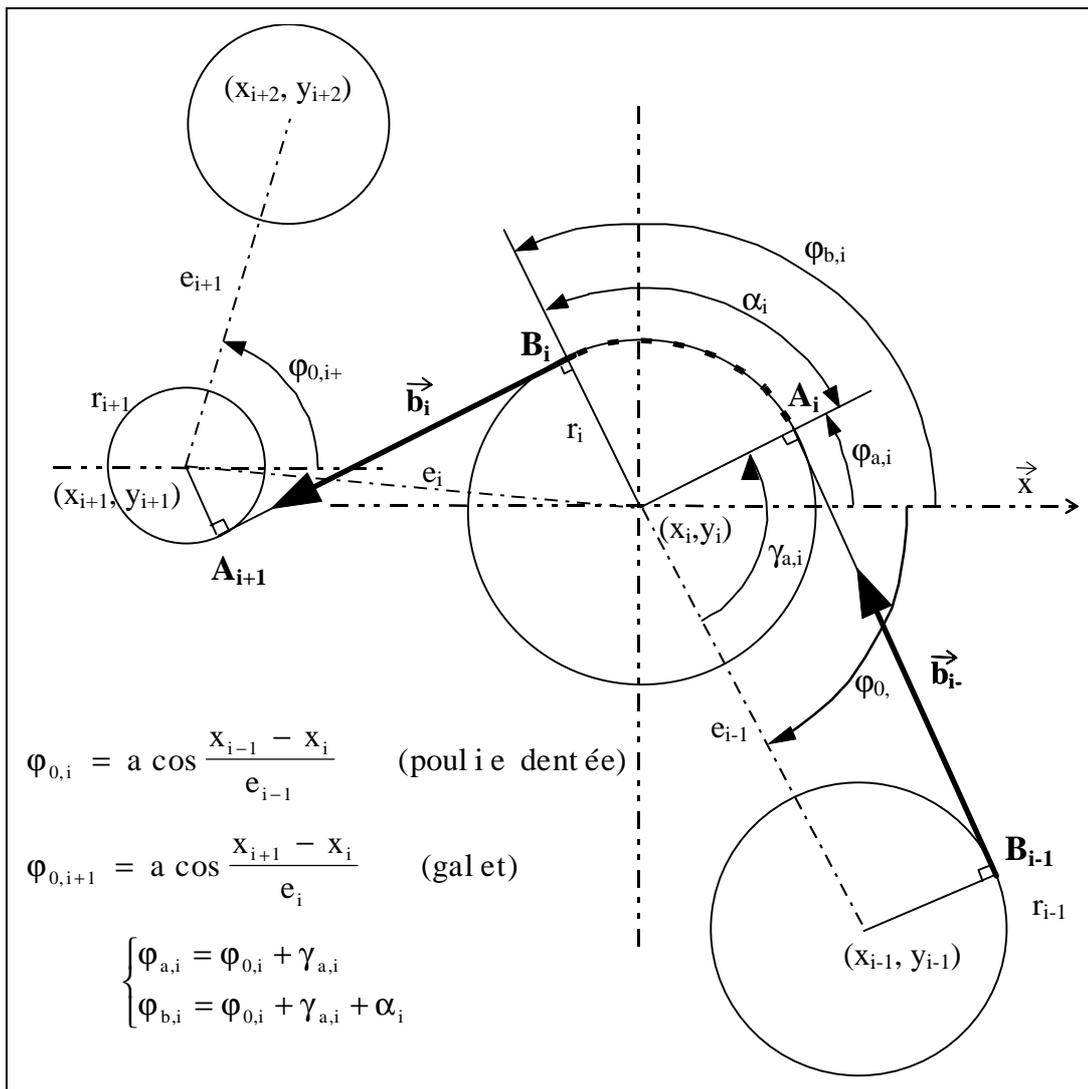


Figure II. 18 : Définition de paramètres vectoriels pour un cas type.

Le calcul de l'énergie cinétique des dents de courroie en prise sur une poulie nécessite la connaissance des coordonnées polaires (r_i, φ_i) de chaque dent (chapitre II.II.3.6.10). De plus, la projection des efforts interne aux brins de courroie (chapitre II.II.3.6.6) implique le calcul des vecteur brin b_i (figure II.18). Les vecteurs brin b_i permettent en outre le calcul de la constante d'efficacité du tendeur η élaborée par R. S. Beikmann (chapitre I.2.1.6.2).

Pour ces raisons, il faut déterminer les angles $\varphi_{a,i} = \varphi_{0,i} + \gamma_{a,i}$ et $\varphi_{b,i} = \varphi_{0,i} + \gamma_{a,i} + \alpha_i$ pour chaque poulie. L'angle φ_0 est calculé par un produit vectoriel et un produit scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{01} = a \sin \frac{|\vec{x} \wedge \overrightarrow{O_{i+k} O_{i+k-1}}|}{\overrightarrow{O_{i+k} O_{i+k-1}}} = a \sin \frac{y_{i+k-1} - y_{i+k}}{e_{i+k-1}} \\ \varphi_{02} = a \cos \frac{\vec{x} \cdot \overrightarrow{O_{i+k} O_{i+k-1}}}{\overrightarrow{O_{i+k} O_{i+k-1}}} = a \cos \frac{x_{i+k-1} - x_{i+k}}{e_{i+k-1}} \end{array} \right. \text{ avec } \begin{cases} k = 0 \text{ pour une poulie dentée} \\ k = 1 \text{ pour un galet} \end{cases}$$

$$\text{Si } \varphi_{01} \leq 0 \text{ alors } \varphi_{0,i} = -\varphi_{02}, \text{ sinon } \varphi_{0,i} = +\varphi_{02} \quad \text{Equ. II. 2}$$

Ainsi, la dent de courroie j sur la poulie i est repérée par $(r_i, \varphi_i = \varphi_{a,i} + p_i/2 + \sum_2^j p_i)$ avec p_i , pas angulaire de la poulie i .

Le calcul des coordonnées des points de tangence A_i et B_i est immédiat :

$$A_i \begin{pmatrix} x_i + r_i \cdot \cos \varphi_{a,i} \\ y_i + r_i \cdot \sin \varphi_{a,i} \end{pmatrix} \text{ et } B_i \begin{pmatrix} x_i + r_i \cdot \cos \varphi_{b,i} \\ y_i + r_i \cdot \sin \varphi_{b,i} \end{pmatrix} \quad \text{Equ. II. 3}$$

L'équation 3 permet de calculer sans difficultés les coordonnées des vecteurs brin \vec{b}_i normalisés à 1.

En raison du mouvement constant des poulies, l'ensemble de ces paramètres géométriques est recalculé à chaque itération de l'intégration des équations du mouvement.

II.3.3. 2^{ème} module : Calcul de la tension dans les brins

II.3.3.1. Modélisation du calcul de la tension dans les brins

Tous les auteurs étudiés au chapitre I relie la tension dans les brins à la rotation des poulies, à l'image de J. N. Fawcett et al. :

$$T_i = T_0 + K(r_i \theta_i - r_{i+1} \theta_{i+1}) \quad \text{id. Equ. I.3}$$

Y.-L. Yang (et Barker) incorpore en plus l'amortissement du brin (équation I.10). En considérant la forme d'une équation type du mouvement ($I\ddot{\theta} + K\theta = C$), nous percevons l'équivalence entre $K\theta$ et $C - I\ddot{\theta}$. Nous pouvons donc rattacher la tension dans un brin au couple C et à l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$. C'est le cas de la modélisation développée ici. Celle-ci est basée sur un calcul de tension dans les brins en statique développé par J.-M. Dancé (1992). Cette modélisation est reprise et généralisée pour le cas dynamique en tenant compte de la rigidité de flexion dans les brins.

On considère n poulies (figure II.19). Nous avons alors n relations d'équilibre pour chaque brin :

$$T_i = t_{i+1} \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n-1 \quad \text{Equ. II. 4}$$

et $T_1 = T_n$; $t_1 = t_2$

Le théorème du moment cinétique appliqué au centre de chaque poulie donne n relations supplémentaires :

$$I_{i/\theta_i} \ddot{\theta}_i + I_{i/u_i} \ddot{u}_i + I_{i/v_i} \ddot{v}_i = C_i + (t_{i+1} - T_{i+1})r_i \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{Equ. II. 5}$$

$$I_n \ddot{\theta}_{n/\theta_i} + I_{n/u_i} \ddot{u}_n + I_{n/v_i} \ddot{v}_n = C_n + (T_1 - t_1)r_n$$

avec C_i couple extérieur au système s'appliquant sur chaque poulie i ,
 I_{i/θ_i} moment d'inertie par rapport au centre la rotation de la poulie,
 $I_{i/u_i}, I_{i/v_i}$ termes de couplage inertiel avec u et v .

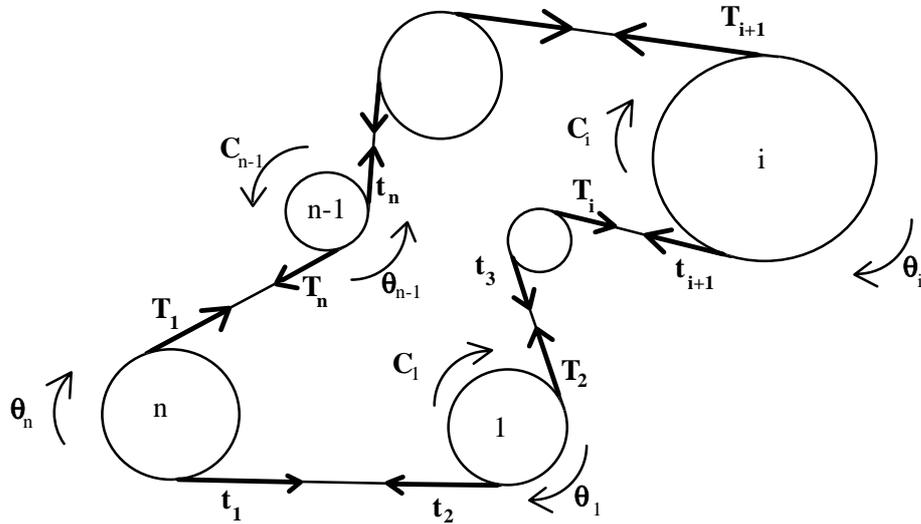


Figure II. 19 : Tension dans les brins.

Le système d'équation II.4 et 5 est indéterminé. En effet, plusieurs tension T_i peuvent donner le même couple et la même accélération. Une relation supplémentaire est nécessaire pour déterminer les tensions T_i et t_i . Cette relation est obtenue en écrivant que la longueur géométrique de la courroie ne varie pas (relation analogue à la conservation de la masse) car les paliers sont considérés comme fixe à l'instant t .

Sous une tension de pose T_0 , un brin a une longueur L_{i0} . Sous une tension $T_i = t_{i+1}$, le brin de courroie (brin libre plus les deux demi-brins enroulés sur les poulies) a une longueur L_{iT} , tel que :

$$L_{iT} = L_{i0} + L_{i0}\mu(T_{i+1} - T_0)$$

où μ est le coefficient d'allongement de la courroie.

Le calcul des longueurs de brin L_{i0} sera traité au chapitre II.II.3.3.3. Toutefois, la longueur totale géométrique de la courroie ne varie pas. On écrit alors :

$$\sum_{i=1}^n L_{i0} = L_{n0} + L_{n0}\mu(t_1 - T_0) + \sum_{i=1}^{n-1} [L_{i0} + L_{i0}\mu(T_{i+1} - T_0)] \quad \text{Equ. II. 6}$$

où $\sum_{i=1}^n L_{i0}$ représente la longueur de la courroie sous tension T_0 .

Développons l'équation II.6 :

$$\sum_{i=1}^n L_{i0} = \sum_{i=1}^n L_{i0} + L_{n0}\mu(t_1 - T_0) + \sum_{i=1}^{n-1} L_{i0}\mu(T_{i+1} - T_0)$$

Ce qui donne après simplification :

$$T_0 \sum_{i=1}^n L_{i0} = t_1 \cdot L_{n0} + \sum_{i=1}^{n-1} L_{i0} T_{i+1} \quad \text{Equ. II. 7}$$

L'équation II.4 est introduite dans l'équation II.5. L'équation $I_1\ddot{\theta}_1 = C_1 + (t_2 - T_2)r_1$ est remplacée par l'équation II.7 ce qui donne :

$$\begin{cases} t_1 L_{10} + \sum_{i=2}^n L_{i0} T_i = T_0 \sum_{i=1}^n L_{i0} \\ T_i r_i - T_{i-1} r_i = C_i - I_{i/\theta_i} \ddot{\theta}_i - I_{i/u_i} \ddot{u}_i - I_{i/v_i} \ddot{v}_i \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n \\ T_1 = T_n \end{cases}$$

On obtient un système linéaire (équation II.8) facilement résoluble par la méthode "LU" (décomposition en deux matrices triangulaires *Lower* et *Upper*). Il permet de connaître la tension dans tous les brins en fonction des longueurs de brins courbes L_{i0} et de la tension T_0 . Cette tension T_0 dépend uniquement de la position $(x_i + u_i, y_i + v_i)$ des poulies calculée lors de l'intégration de l'équation du mouvement, et qui serait celle de toute la courroie si aucun couple n'était appliqué à la transmission. À l'instant initial, la tension T_0 est donc la tension de pose. Ce calcul a l'avantage déterminant d'éviter d'avoir à connaître le couple appliqué sur la poulie 1, soit le vilebrequin.

$$\begin{bmatrix} L_{n0} & L_{10} & L_{20} & \dots & L_{i-1,0} & L_{i0} & \dots & L_{n-2,0} & L_{n-1,0} \\ 0 & -r_2 & r_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_3 & \ddots & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & -r_i & r_i & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ r_n & 0 & \dots & & & \dots & 0 & -r_{n-1} & r_{n-1} \\ & & & & & & & 0 & -r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \sum_{i=1}^n L_{i0} \\ C_2 - I_{2/\theta_2} \ddot{\theta}_2 - I_{2/u_2} \ddot{u}_2 - I_{2/v_2} \ddot{v}_2 \\ C_3 - I_{3/\theta_3} \ddot{\theta}_3 - I_{3/u_3} \ddot{u}_3 - I_{3/v_3} \ddot{v}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_i - I_{i/\theta_i} \ddot{\theta}_i - I_{i/u_i} \ddot{u}_i - I_{i/v_i} \ddot{v}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n - I_{n/\theta_n} \ddot{\theta}_n - I_{n/u_n} \ddot{u}_n - I_{n/v_n} \ddot{v}_n \end{bmatrix} \quad \text{Equ. II. 8}$$

Le chapitre II.II.3.3.4 décrit l'algorithme de convergence du calcul de la tension dans les

brins. Durant la convergence, une tension de brin négative peut être calculée. Cet état n'est pas physique et la tension la plus faible est ramenée dans ce cas à 18 N. Cette tension seuil est choisie d'après les résultats expérimentaux (chapitre III.5.1). La tension dans les autres brins est augmentée de la même valeur. Dans ce cas, l'équation II.8 est toujours vérifiée avec T_0 augmenté également de la même valeur.

La résolution de l'équation II.8 passe par la connaissance de la longueur des brins L_{i0} . La bibliographie suivante montre que la longueur d'un brin dépend de la tension dans ce brin, et développe les équations décrivant ce phénomène.

II.3.3.2. Bibliographie concernant la forme d'une courroie due à sa raideur de flexion

C. A. Coulomb (1785) a étudié pour la première fois la forme d'une courroie plate sur une transmission à deux poulies de même rayon R (figure II.20).

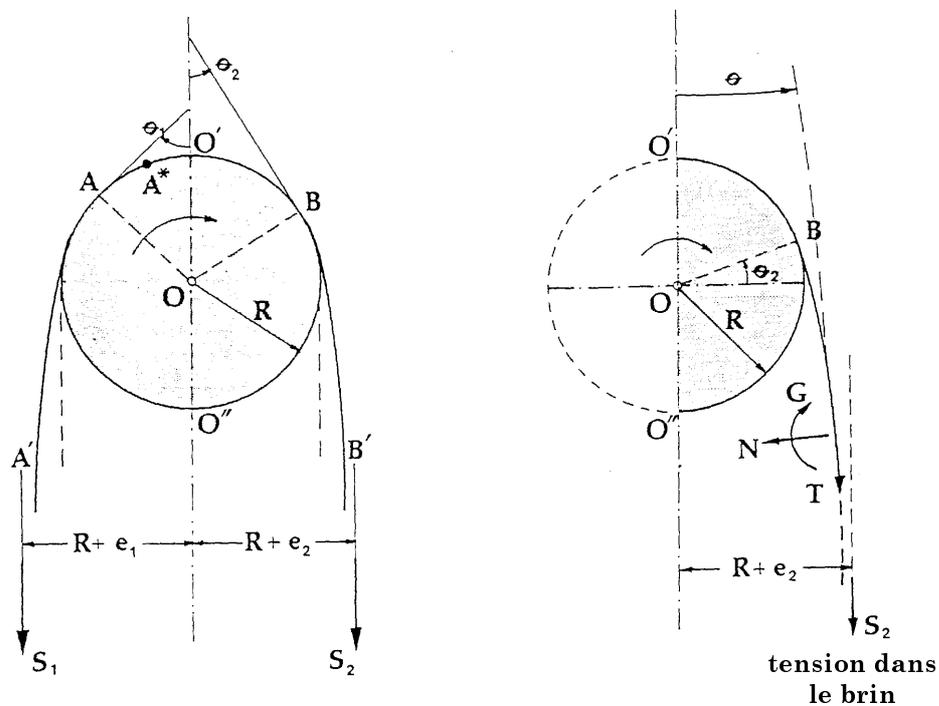


Figure II. 20 : Paramètres de courbure de courroie [Fosdick et Villaggio].

Si les deux brins sont suffisamment long, ils ont tendance à s'approcher de deux lignes asymptotiques à la distance $(R+e_1)$ et $(R+e_2)$ de la ligne médiane passant par O. C. A. Coulomb propose, sur la base d'observations expérimentales, cette loi pour e_1 et e_2 :

$$e_1 + e_2 = \delta^n \left(a + \frac{b}{S_\infty} \right) \tag{Equ. II. 9}$$

où δ est l'épaisseur de la courroie, $S_\infty = (S_1 + S_2) / 2$, S_1 et S_2 sont les tensions dans les brins, et a,b,n sont des paramètres déterminés expérimentalement. La formule a plus tard été simplifiée¹ par :

¹ Eytelwein, J. A., 1808, "Handuck der Statik Fester Korper", Bd. II, Berlin.

$$e_1 + e_2 = c \cdot \delta^2 \quad \text{Equ. II. 10}$$

G. Hamel propose pour la première fois en 1927, une justification théorique des formules empiriques 1 et 2, en considérant la courroie comme une poutre élastique. R. Fosdick et P. Villaggio reprennent les travaux de Hamel. Ils proposent une révision pour éliminer certaines erreurs commises dans les conditions limites ainsi qu'une généralisation en utilisant une loi d'élasticité en grand déplacement non linéaire. L'auteur considère les non-linéarités dans la loi contrainte-déformation comme non négligeables. En conséquence, on obtient des brins rectilignes parallèles à une distance finie de la poulie. À contrario, la forme rectiligne ne s'obtient qu'à une distance infinie de la poulie lorsque la courroie est linéairement élastique. L'effet de la pesanteur sur la forme de la courroie est négligée.

L'équilibre d'une portion élémentaire de courroie sur l'arc BB' (figure II.20) est décrite en termes classiques² :

$$T = S_2 \cos \theta, \quad N = S_2 \sin \theta, \quad \frac{dG}{ds} + N = 0. \quad \text{Equ. II. 11}$$

avec T(s), tension, N(s), effort tranchant, G(s), moment de flexion, θ , angle tangent à la courbe, et s, coordonnée curviligne de la courroie s'annulant en O'.

On considère les vecteurs x, y, et z du repère principal centrés sur une section de courroie, avec x dans l'axe de N, y, axe du moment G, et z, dans l'axe de T. Si la courroie est suffisamment fine, le taux de déformation est exprimé proportionnellement à la courbure de la courroie (théorie des poutres fines de Kirchhoff) :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{d\theta}{ds} x \quad \text{Equ. II. 12}$$

La loi non-linéaire reliant le taux de déformation ε_{zz} à la contrainte normale σ_{zz} est suggérée par certaines expérimentations^{3 et 4} :

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}^n \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad \text{Equ. II. 13}$$

On obtient ainsi l'expression du moment fléchissant G :

$$G = \iint_A -x\sigma_{zz} dx dy = -D_n \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^n \quad \text{avec} \quad D_n = E \iint_A x^{n+1} dx dy \quad \text{Equ. II. 14}$$

Pour n=1, on retrouve la raideur de flexion linéaire $D_1 = EI$ (E, module d'élasticité longitudinal et I, moment d'inertie de la section et perpendiculaire au plan de flexion). En combinant les équations II.11 et 14, nous obtenons l'équation différentielle :

$$D_n \frac{d}{ds} \left[\left[\frac{d\theta}{ds} \right]^n \right] - S_2 \sin \theta = 0 \quad s_2 \leq s \leq \infty \quad \text{Equ. II. 15}$$

² Love, A. E. H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 4th Ed., The University Press, Cambridge.

³ Bach, "Maschinenelemente", Berlin, 1920.

⁴ Poschl, T., "Der Stoss", Handbuch der Physik, Bd. VI, Springer, Berlin., 1928.

où s_2 est la longueur de l'arc O'B. En multipliant l'équation II.15 par $d\theta/ds$, celle-ci se réécrit sous la forme :

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{n}{n+1} D_n \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^{n+1} + S_2 \cos \theta \right] = 0 \quad \text{Equ. II. 16}$$

Nous obtenons l'intégrale première :

$$\frac{n}{n+1} D_n \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^{n+1} + S_2 \cos \theta = \text{const.} = S_2 \quad \text{Equ. II. 17}$$

où la constante est déterminée par les conditions limites $\theta(s \rightarrow +\infty) = 0$ et $d\theta/ds(s \rightarrow +\infty) = 0$. Finalement :

$$\frac{n}{n+1} D_n \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^{n+1} - 2.S_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0 \quad \text{Equ. II. 18}$$

La courbure peut maintenant être explicitée :

$$\frac{d\theta}{ds} = \sqrt[n+1]{2 \frac{n+1}{n} \frac{S_2}{D_n} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{Equ. II. 19}$$

où seul la racine négative est considérée, puisque θ décroît suivant s .

On peut obtenir dès maintenant l'angle $\theta_2 = \theta(s_2)$, déterminé par la condition $d\theta/ds(s = s_2) = -1/R$:

$$\theta_2 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{R^{n+1}} \frac{n}{2.(n+1)} \frac{D_n}{S_2}} \quad \text{Equ. II. 20}$$

Nous constatons que la courroie se désengrène de la poulie lorsque la tension S_2 diminue. Le saut de dent est vraisemblablement initié par ce phénomène, réduisant le nombre de dents de courroie en prise sur la poulie.

Les variables de l'équation II.19 sont séparées pour obtenir :

$$\frac{d\theta}{\sin^{2/(n+1)} \frac{\theta}{2}} = \sqrt[n+1]{2 \frac{n+1}{n} \frac{S_2}{D_n}} ds \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad \text{Equ. II. 21}$$

La solution de l'équation II.19, satisfaisant la condition limite $\theta_2 = \theta(s_2)$, a la forme⁵ :

$$\underline{n=1}$$

⁵ Gradshteyn, I. S., Ryzhyk, I. M., "Tables of Integrals, Series, and Products", New York :Academic Press, 1965.

$$\tan \frac{\theta}{4} = \tan \frac{\theta_2}{4} e^{\sqrt{S_2/D_1}(s_2-s)} \quad s_2 \leq s \leq \infty \quad \text{Equ. II. 22}$$

n= 3, 5, ...

$$B_{\sin^2 \theta/2} \left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2} \right] = B_{\sin^2 \theta_2/2} \left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2} \right] - \sqrt[n+1]{2 \frac{n+1}{n} \frac{S_2}{D_n}} (s-s_2) \quad s_2 \leq s \leq \infty \quad \text{Equ. II. 23}$$

où $B_{|x| \leq 1} [p, q] = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt / \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$ est la fonction beta incomplète.

Nous pouvons également expliciter $s(\theta)$:

n=1

$$s(\theta) = \sqrt{\frac{S_2}{D_1}} \left[\ln \left(\tan \frac{\theta_2}{4} \right) - \ln \left(\tan \frac{\theta}{4} \right) \right] + s_2 \quad \text{Equ. II. 24}$$

n= 3, 5, ...

$$s(\theta) = \frac{B_{\sin^2 \theta_2/2} \left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2} \right] - B_{\sin^2 \theta/2} \left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2} \right]}{\sqrt[n+1]{2 \frac{n+1}{n} \frac{S_2}{D_n}}} + s_2 \quad \text{Equ. II. 25}$$

L'équation II.19 indique que le brin reste droit ($d\theta/ds = 0$) une fois que $\theta = 0$. Or l'équation II.22 montre que pour $n=1$, on a $\theta = 0$ lorsque $s \rightarrow \infty$. Le brin libre ne devient donc jamais rectiligne. Par contre, pour $n \neq 1$, l'équation montre que θ s'annule pour une valeur finie de s :

$$s(\theta = 0) = \frac{B_{\sin^2 \theta_2/2} \left[\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{1}{2} \right]}{\sqrt[n+1]{2 \frac{n+1}{n} \frac{S_2}{D_n}}} + s_2 \quad \text{Equ. II. 26}$$

Un brin de courroie étant en réalité rectiligne, le modèle développé par R. Fosdick et P. Villagio est donc plus réaliste pour $n= 3, 5, \dots$ G. Gerbert (1981) constate également que le modèle pour $n=1$ diffère de la réalité : "... experiments show that the measured lack of contact angle [angle de décollement θ] differs considerably from the estimated one."

R. Fosdick et P. Villagio développent également une solution approchée en tenant compte de l'inertie de la courroie pour une faible vitesse constante de translation. Les équations d'équilibre de l'arc de courroie BB' (figure II.20), deviennent :

$$\frac{dT}{ds} - N_k = 0, \quad \frac{dN}{ds} + T_k = -\rho A v^2 \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{dG}{ds} + N = -\rho I v^2 \frac{d^2\theta}{ds^2} \quad \text{Equ. II. 27,}$$

avec $T(s)$, tension, $N(s)$, effort tranchant, $G(s)$, moment de flexion, θ , angle tangent à la courbe, s , coordonnée curviligne de la courroie s'annulant en O' , ρ , densité massique de la courroie, A , aire d'une section, v , vitesse stationnaire de la courroie, et J , moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation y .

L'auteur obtient :

$$\theta_2 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\frac{1}{R^{n+1}} \frac{n}{2 \cdot (n+1)} \frac{D_n}{S_2 - \rho A v^2}}{\left[1 + \frac{1}{2n} \frac{\rho I v^2}{D_n} R^{n-1}\right]^{n+1}}} \quad \text{Equ. II. 28}$$

En comparant les équations II.20 et 28, nous pouvons apprécier l'impact de l'inertie de la courroie sur l'angle de décollement θ_2 . Dans ce but, nous considérons une section de courroie ISORAN[®] PIRELLI. La hauteur h d'une section varie si on prend en compte ou non une dent de courroie. Celle-ci est moyennée à 3.6 mm. La largeur L est de 310 mm. La densité massique ρ est de 0.14 kg/m. La raideur de flexion $D_1 = 9e-3$ N.m² est déterminée par le recalage des tensions dans les brins. Le rayon R de la poulie est de 0.06 mm et la vitesse de rotation de 1000 tr/mn. Nous avons en outre :

$$I = A \cdot h^2 / 12 = 1.2e-9 \text{ m}^4$$

$$E = D_1 / I = 7.75e6 \text{ kg/m}^2$$

$$D_n = E \int_{-L/2}^{+L/2} dy \int_{-h/2}^{+h/2} x^{n+1} dx = \frac{2EL}{n+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+2} = \frac{4.8e+6}{n+2} (1.8e-3)^{n+2}$$

$$A = L \cdot h = 1.116e-3 \text{ m}.$$

$$v = 6.28 \text{ m/s}.$$

Nous obtenons :

$$\frac{D_n}{S_2 - \rho A v^2} = \frac{D_n}{S_2 - 6e-3} \approx \frac{D_n}{S_2}$$

$$1 + \frac{1}{2n} \frac{\rho I v^2}{D_n} R^{n-1} = 1 + \frac{n+2}{n} \frac{6.9e-16}{(1.8e-3)^{n+2}} 0.06^{n-1} \approx 1 \quad \text{pour } n = 1, 3$$

L'inertie de la courroie est donc négligeable pour des faibles valeurs de n , et bien sûr, de vitesse v .

En raison de la complexité des équations décrivant la forme d'un brin libre, il est nécessaire de se restreindre au cas linéaire $n=1$, pour développer davantage les équations tout en pouvant les exploiter informatiquement d'une manière simple. C'est la démarche suivie par G. Gerbert (1991). Il retrouve les formules II.19, 22 et 24 pour $n=1$:

$$\left| \frac{d\theta}{ds} = \frac{2\sqrt{T_*}}{R} \sin \frac{\theta}{2} \right. \quad \text{Equ. II. 29}$$

$$\left| \tan \frac{\theta}{4} = \tan \frac{\theta_c}{4} e^{-\sqrt{T_*} \frac{s}{R}} \right. \quad \text{Equ. II. 30}$$

$$\left| s = \frac{R}{\sqrt{T_*}} \left[\ln \left(\tan \frac{\theta_c}{4} \right) - \ln \left(\tan \frac{\theta}{4} \right) \right] \right. \quad \text{Equ. II. 31,}$$

avec $T_* = TR^2/S$ tension adimensionalisée, S raideur de flexion, T tension dans le brin, θ_c angle de décollement (figure II.21).

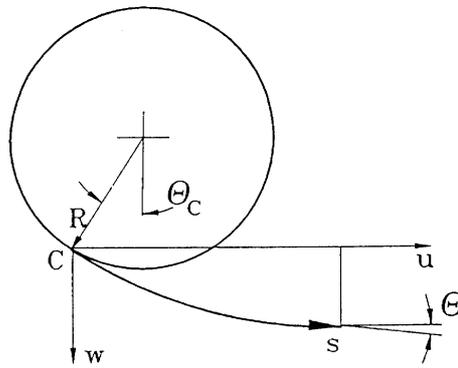


Figure II. 21 : Géométrie d'un brin libre [Gerbert, 1991].

D'après la figure II.21, nous avons :

$$\left| \begin{array}{l} du = ds \cos \theta \\ dw = ds \sin \theta \end{array} \right. \quad \text{Equ. II. 32}$$

La différence δ entre la longueur s de la courbe, et de l'abscisse u est :

$$d\delta = ds - du = \frac{ds}{d\theta} (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{R}{\sqrt{T_*}} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \quad \text{Equ. II. 33}$$

D'où :

$$\delta = s - u = \frac{2R}{\sqrt{T_*}} \left[\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta_c}{2} \right] \quad \text{Equ. II. 34}$$

$$w = \frac{2R}{\sqrt{T_*}} \left[\sin \frac{\theta_c}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{le 2 manque dans [Gerbert, 1991]}) \quad \text{Equ. II. 35}$$

Un développement au premier ordre des équations II.31 et 34, nous mènent à :

$$\theta = \theta_c e^{-\sqrt{T_*} \frac{u}{R}} \quad \text{Equ. II. 36}$$

L'équation 12 devient (à condition que $1/\sqrt{T_*} \ll 1$) :

$$\theta_c = 1/\sqrt{T_*} \quad \text{Equ. II. 37}$$

Nous obtenons alors au premier ordre ($1/\sqrt{T_*} \ll 1$) :

$$w = \frac{2R}{\sqrt{T_*}} \left[1 - e^{-\sqrt{T_*} \frac{u}{R}} \right] \quad \text{Equ. II. 38}$$

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{T_*}} e^{-\sqrt{T_*} \frac{u}{R}} \quad \text{Equ. II. 39}$$

$$s = u + \frac{R}{4T_*^{3/2}} \left[1 - e^{-2\sqrt{T_*} \frac{u}{R}} \right] \quad \text{Equ. II. 40}$$

G. Gerbert (1981) développe d'autres équations en considérant le brin libre symétrique autour de son point milieu A (figure II.22), considéré comme l'origine du repère (u, w). Cela implique d'autres conditions limites : L'effort tranchant Q (figure II.23), la déflexion w et sa dérivée w' sont considérés comme nuls pour u=0 (au point A). La dérivée seconde w'' est égale à la courbure de la poulie 1/R pour u=u_c. On obtient la loi :

$$w = \frac{S}{TR} \frac{\cosh \sqrt{\frac{T}{S}} u - 1}{\cosh \sqrt{\frac{T}{S}} u_c} \quad \text{Equ. II. 41,}$$

avec S, rigidité de flexion, T, tension dans le brin, R, rayon de la poulie. Au point C₀, nous retrouvons, en développant au premier ordre, la formule II.37 :

$$w'_c = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{S}{T}} \quad \text{Equ. II. 42}$$

Nous pouvons noter que M. Y. Yue (1993) utilise aussi les formules II.41 et 42 dans son étude de vibrations transversales de courroie (figure II.22).

Connaissant maintenant les équations décrivant la forme d'un brin libre de courroie, nous pouvons mettre en place une méthodologie informatique de calcul de la longueur des brins.

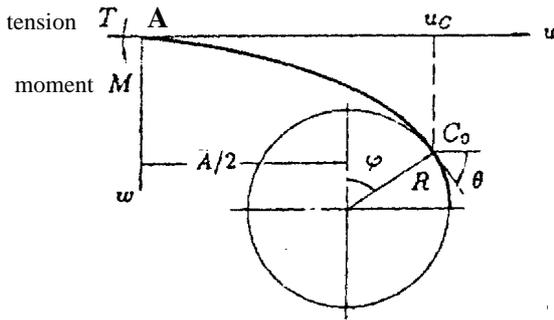


Figure II. 22 : Géométrie d'un brin libre [Yue, 1993].

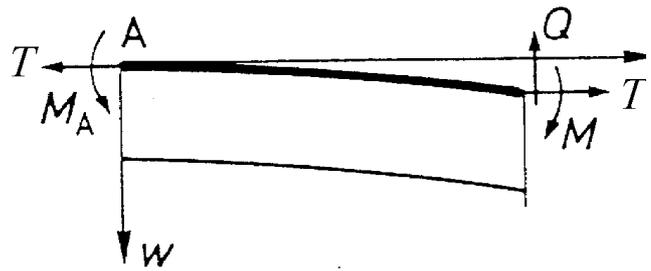


Figure II. 23 : Chargement d'un brin libre [Gerbert, 1981].

II.3.3.3. Calcul de la longueur L_{i0} d'un brin i sous une tension T

Après de multiples essais de formulation, le meilleur résultat acquis lors de la validation du calcul des tensions dans les brins, est obtenu par une application simple de l'équation II.40 :

$$s_i = u_c + \frac{R_i}{4T_*^{3/2}} \left[1 - e^{-2\sqrt{T_*} \frac{u_c}{R_i}} \right] \quad \text{id. Equ. II. 40}$$

avec s_i longueur du demi-brin courbe (figure II.24),
 u_c abscisse curviligne du brin,
 R_i rayon de la poulie,
 $T_* = TR^2/S$ tension adimensionnée.

L'abscisse u_c est définie en toute rigueur par : $u_c = l_i/2 + R_i \sin \varphi_i$. La longueur du brin rectiligne l_i est facilement calculée (figure II.17). Pour de petits angles φ_i , nous avons $R_i \sin \varphi_i \approx R_i \varphi_i$. Or l'équation II.40 n'est valable que pour des petits angles φ_i (ou pour $1/\sqrt{T_*} \ll 1$). En effet, pour de grands angles φ_i , nous obtenons la longueur du demi-brin courbe s_i inférieure à la longueur du demi-brin droit ajoutée de l'arc $R_i \varphi_i$ (c'est-à-dire $s_i \leq l_i/2 + R_i \varphi_i$). Cela n'est évidemment pas physique (voir le commentaire en italique de G. Gerbert page 110). Pour obtenir des longueurs de brin plus précises quelque soit la valeur de l'angle φ_i , la formulation suivante de l'abscisse curviligne s_i est adoptée :

$$u_c = l_i/2 + R_i \varphi_i \quad \text{Equ. II. 43}$$

Ainsi, le critère géométrique sur les longueurs ($s_i \geq l_i/2 + R_i \varphi_i$) est toujours vérifié. La longueur du brin courbe L_i est alors :

$$L_i = s_i + s_{i+1} \quad \text{Equ. II. 44}$$

La longueur des brins L_i dépendant à la fois des tensions et utilisée pour le calcul des tensions (équation II.8), un calcul itératif s'impose. Il est décrit au chapitre suivant.

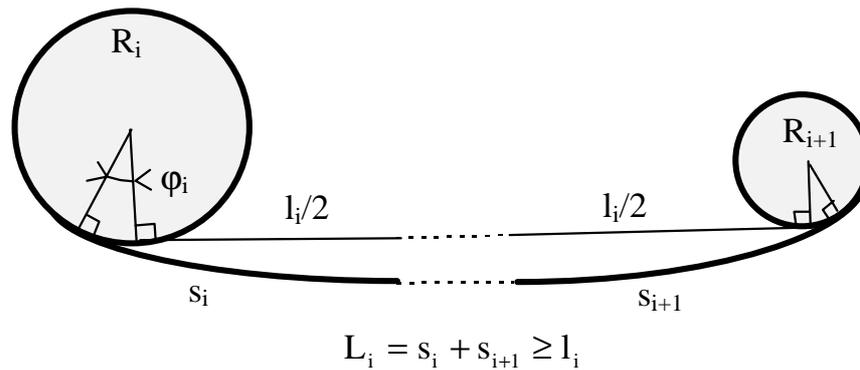


Figure II. 24 : Calcul de la longueur d'un brin courbe.

II.3.3.4. Calcul non-linéaire des tensions

La résolution itérative des systèmes non linéaire multidimensionnels est en général très difficile. Le problème de convergence est donc ramené à un paramètre unique : ΔT . La tension dans les brins de l'instant précédent est utilisée pour un premier calcul des tension dans les brins (équation II.8). Or la différence des tensions $\{T_i - T_j, \forall (i, j) \subset [1, n]^2\}$ est uniquement déterminée par le couple $C_i - I_i \ddot{\theta}_i$ de chaque poulie. Par conséquent, cette différence reste constante quelque soit la longueur des brins. La tension finalement obtenue au cours de l'itération est donc la tension initiale au processus de convergence ajoutée d'un paramètre ΔT identique pour tous les brins. La convergence est ainsi assurée par un seul paramètre ΔT et par une méthode classique de bisection. La convergence est difficile et de petit pas doivent être adoptés. En effet, pour les forts couples, la tension dans le brin mou décroît très faiblement (figure III.30). Or, une variation de quelques dixièmes de Newton dans le brin mou provoque une variation de quelques dizaines de Newton dans le brin tendu. Une telle sensibilité dans la valeur des tensions entraîne par conséquent une convergence lente du calcul non-linéaire des tensions avec pour chaque itération le calcul complet des longueurs de brin courbes. En conséquence, le calcul itératif est long et peut prendre jusqu'à 50 % du temps de calcul total du programme.

II.3.4. 3^{ème} module : Calcul des charges et des déformations sur les dents de courroie enroulées

Cinq modèles de répartition des charges sur les dents de courroie enroulées sont présentés dans la littérature avec un degré de sophistication croissant. G. Gerbert a publié la premier en 1978, deux modèles mathématiques simples qui font l'objet du chapitre II.II.3.4.1. Le premier modèle, sans frottement, est repris pour la mesure de la loi de déformation d'une dent de courroie (chapitre III.3.1.1.3.2). Ensuite, T. Koyama (1979) publie un modèle intégrant la différence de pas entre la courroie et la poulie et une loi non linéaire de déformation d'une dent de courroie. T. H. C. Childs et al. reprennent la modélisation de T. Koyama, mais en différenciant la poulie menée et la poulie motrice par le sens du frottement. Enfin, J.-M. Dancé synthétise en 1992 les modèles proposés par T. H. C. Childs et T. Koyama. Ce modèle, incorporé dans notre modélisation dynamique, est présentée dans le chapitre II.II.3.4.2. Un second modèle s'appuyant sur la géométrie fine d'une courroie à profil trapézoïdale et H.T.D. est développé par J.-M. Dancé et D. Play (1991).

II.3.4.1. *Modèle Gerbert (1978)*

II.3.4.1.1. *Modèle sans frottement*

La transmission d'un couple sur une poulie par une courroie dentée, induit une différence de tension sur les deux extrémités de la courroie : T tension dans le brin tendu, t tension dans le brin mou (figure II.25). Les charges se répartissent sur les différentes dents en contact, le frottement est négligé dans un premier temps.

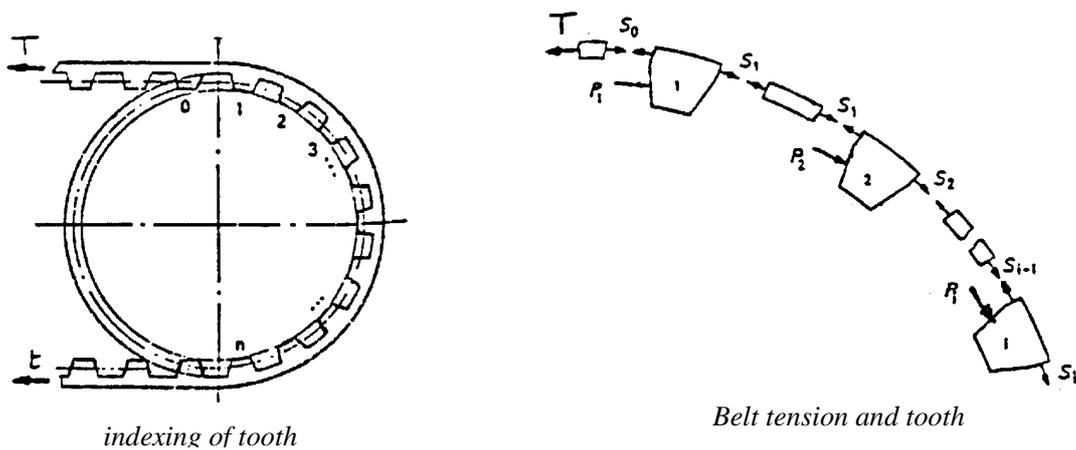


Figure II. 25 : Numérotation des dents et équilibre [Gerbert, 1978].

Pour la dent en contact i , nous avons (figure II.25) :

$$P_i = S_{i-1} - S_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \tag{Equ. II. 45}$$

Aux conditions limites : $T = S_0$ et $t = S_n$

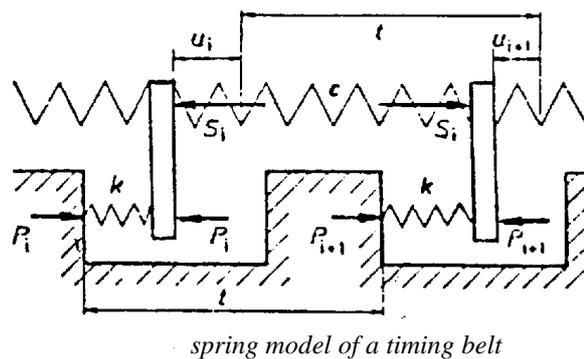


Figure II. 26 : Modèle ressort [Gerbert, 1978].

Le système d'équation II.45 est hyperstatique. Une relation supplémentaire entre les déformations de dent de courroie est donc introduite (figure II.26) :

$$u_{i+1} = u_i - du_i \tag{Equ. II. 46}$$

avec u_i déformation de la dent de courroie i ,
 du_i déformation de l'âme de courroie i .

La courroie est constituée d'une âme de rigidité k , et d'une dent de rigidité K . On écrit alors :

$$\begin{cases} P_i = K.u_i \\ S_i = k.du_i \end{cases} \quad \text{Equ. II. 47}$$

L'équation II.46 devient :

$$k_0^2.S_i = P_i - P_{i+1} \quad (\text{avec } k_0 = \sqrt{K/k}) \quad \text{Equ. II. 48}$$

En combinant les équations II.45 et 48, G. Gerbert obtient :

$$S_{i+1} - 2.S_i + S_{i-1} = \Delta^2(S_i) = k_0^2.S_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{Equ. II. 49}$$

avec Δ , opérateur des différences finies ($\Delta(S_i) = S_{i+1} - S_i$).

Au premier ordre, l'équation II.49 s'écrit :

$$\frac{d^2 S_i}{di^2} = k_0^2.S_i \quad \text{Equ. II. 50}$$

La solution de l'équation II.50 est de la forme :

$$S_i = A.sh(k_0 i) + B.ch(k_0 i) \quad \text{Equ. II. 51}$$

Les conditions aux limites ($i=0 \quad S_0=T$, $i=n \quad S_n=t$) permettent de déterminer A et B . On obtient finalement :

$$S_i.sh(k_0 n) = t.sh(k_0 i) + T.sh(k_0(n-i)) \quad \text{Equ. II. 52}$$

Les charges sur les dents P_i sont obtenues en utilisant l'équation II.48:

$$P_i.sh(k_0 n) = t.[sh(k_0(i-1)) - sh(k_0 i)] + T.[sh(k_0(n+1-i)) - sh(k_0(n-i))] \quad \text{Equ. II. 53}$$

G. Gerbert publie un modèle plus complet en introduisant le frottement au niveau du contact de la dent de poulie sur le tissu recouvrant la courroie.

II.3.4.1.2. Modèle avec frottement

Contrairement au chapitre précédent, il faut maintenant dissocier l'équilibre de la dent seule et l'équilibre de l'âme (figure II.27) :

$$\text{Équilibre de la dent: } P_i = S_{i-1,b} - S_{i,a} \quad \text{Equ. II. 54}$$

Équilibre de l'âme (poulie menée) : $S_{i,a} = S_{i,b} \cdot e^{f\theta}$

Equ. II. 55

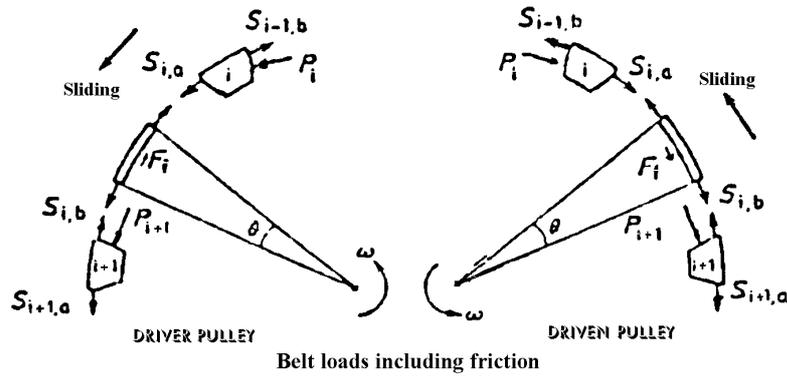


Figure II. 27 : Frottement de la courroie sur la poulie [Gerbert, 1978].

La relation supplémentaire entre les déformation de dents (équation II.46) conduit à une relation de déformation similaire à l'équation II.48:

$$k_0^2 \cdot S_{i,moy} = P_i - P_{i+1} \quad \text{Equ. II. 56}$$

avec $S_{i,moy}$, la tension moyenne dans l'âme :

$$S_{i,moy} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} S_{i,b} \cdot e^{f\beta} d\beta = \frac{S_{i,b}}{f\theta} \cdot (e^{f\theta} - 1)$$

L'équation II.54 permet d'obtenir P_{i+1} en fonction de $S_{i,a}$ et $S_{i,b}$, d'où en utilisant les équations II.55 et 56:

$$S_{i+1,b} - [1 + e^{-f\theta} + (k_0 / \theta f) \cdot (1 - e^{-f\theta})] \cdot S_{i,b} + e^{-f\theta} \cdot S_{i-1,b} = 0 \quad \text{Equ. II. 57}$$

En développant à l'ordre 2 le terme $(k_0 / \theta f) \cdot (1 - e^{-f\theta})$, l'équation II.57 devient:

$$S_{i+1,b} + \alpha \cdot S_{i,b} + e^{-f\theta} \cdot S_{i-1,b} = 0 \quad \text{Equ. II. 58}$$

avec $\alpha = 1 + e^{-f\theta} + (1 - f\theta / 2)k_0$

La résolution directe du système d'équation II.58 conduit après introduction des conditions aux limites à:

$$\frac{S_{i,b}}{T} = \frac{1}{r_1^n - r_2^n} \left[r_1^n \cdot r_2^i - r_2^n \cdot r_1^i + \frac{t}{T} (r_1^i - r_2^i) \right] \quad \text{Equ. II. 59}$$

avec $2r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4e^{-f\theta}}$ et $2r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4e^{-f\theta}}$

La répartition des charges sur les dents est déduite des équations II.54, 55 et 59. Les équations restent valable pour la poulie menée. Il suffit de remplacer le coefficient de frottement f par $-f$.

II.3.4.1.3. Conclusion

Les deux modèles précédemment exposés ne sont pas exploitables dans le cadre de notre modélisation dynamique. Ils ne tiennent pas compte de paramètres essentiels comme la différence de pas entre la courroie et la poulie [Dancé, 1992]. Surtout, la rigidité des dents est constante et ne tient pas compte des facteurs de la pression radiale exercée sur la courroie et sa non linéarité suivant la déformation de la dent. En revanche, le modèle de J.-M. Dancé détaillé au chapitre suivant, tient compte de la non linéarité de la loi de déformation de la dent. Une évolution de ce modèle incorpore également le paramètre de la pression radiale.

II.3.4.2. Modèle Dancé (1992) appliqué au modèle dynamique de rotation

II.3.4.2.1. Définition des paramètres de la géométrie d'engrènement

Le modèle de répartition des charges sur les dents engrénées utilise différentes variables afférentes à la géométrie d'engrènement. Ce chapitre définit le jeu longitudinal entre la dent de poulie et de courroie, l'angle d'enroulement de la courroie sur une dent de poulie, et le pas d'engrènement nécessaire pour comprendre les interférences de bases entre la poulie et la courroie.

◆ Jeu longitudinal BL entre la dent de poulie et de courroie

Les dents de courroies engrénées n'emplissent pas le volume du creux de poulie. Apparaît alors la notion de jeu longitudinal pour des dents non chargées. Le jeu BL est l'espace ménagé entre la dent de courroie et la dent de poulie (figure II.28). Il est constant pour le profil trapézoïdal mais ne l'est pas pour un profil général comme le profil H.T.D. On définit alors un jeu BL moyen, situé à mi-hauteur de la dent de poulie. Il est compris en général entre 1 et 5/10 millimètre.

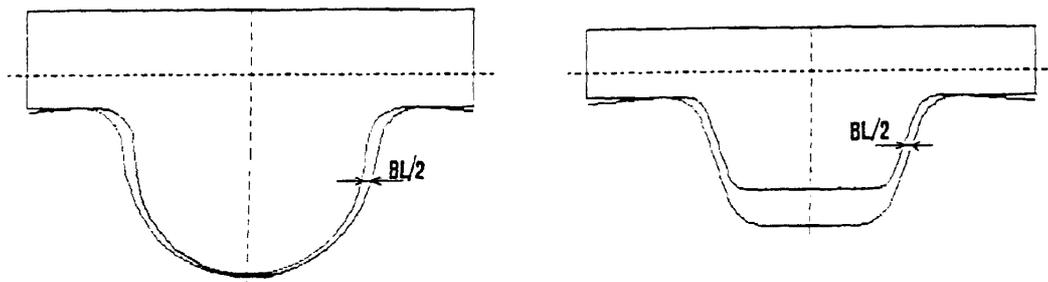


Figure II. 28: Jeu longitudinal BL pour le profil H.T.D. et trapézoïdal.

◆ Angle d'enroulement β' de la courroie sur une dent de poulie

La partie de la courroie enroulée sur le diamètre extérieur de la poulie est soumise à une force de frottement. On peut diviser cette partie en trois zones (figure II.29) : (1) et (3) La courroie s'enroule sur deux petits rayons de raccordement entre le diamètre extérieur de la poulie et le creux (ou la gorge) de poulie. (2) Une zone de contact sur le diamètre extérieur de la poulie. Ces trois zones définissent un angle d'enroulement β' de la courroie sur une dent de poulie. Cet angle est en général proche du tiers du pas angulaire de la poulie (nombre de dents de poulie divisé par 2π).

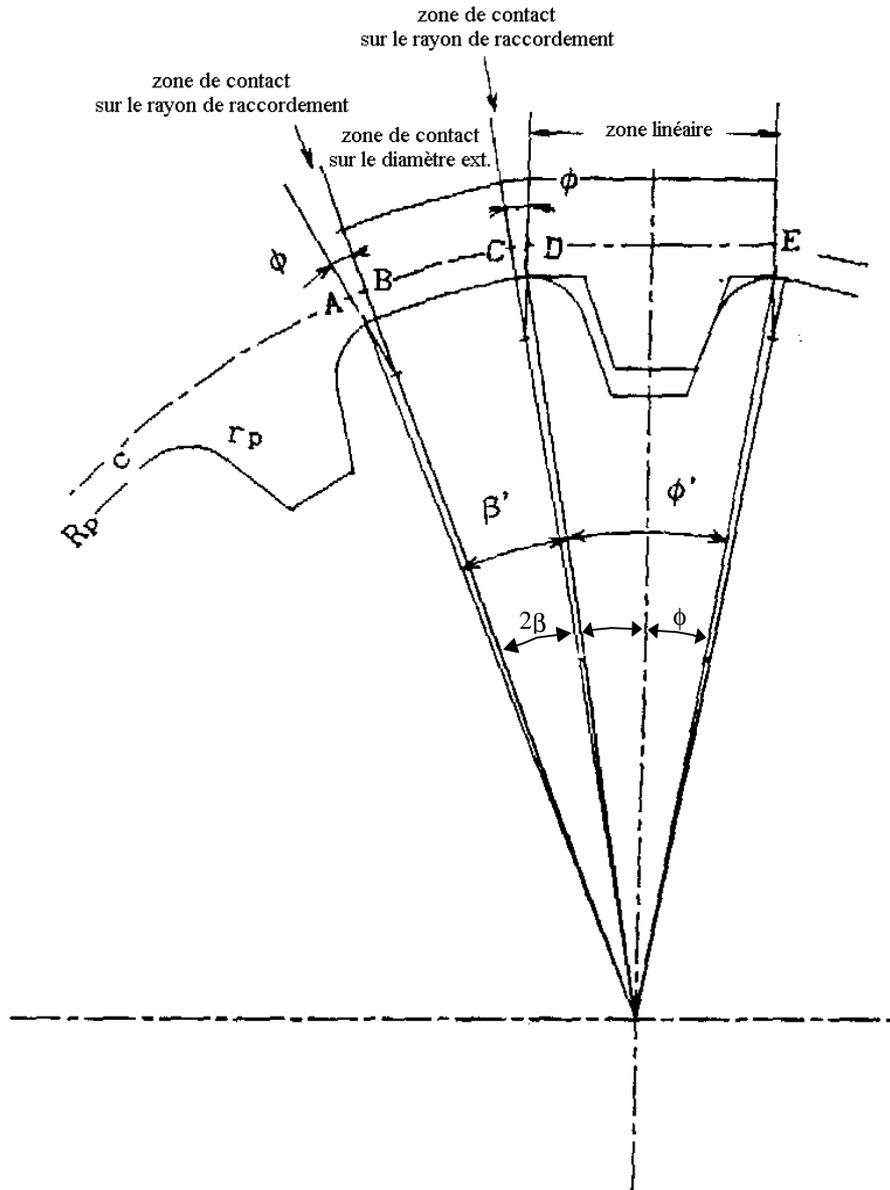


Figure II. 29 : Géométrie d'engrènement.

◆ *Le pas d'engrènement* t'_p

Préalablement aux calculs des interférences de bases, il faut définir le pas d'engrènement. La longueur d'enroulement sur un pas de poulie s'appelle le pas d'engrènement t'_p . La courroie s'enroule sur la partie supérieure des dents de la poulie, et reste linéaire entre les dents de la poulie (figure II.29) :

$$t'_p = AE = AB + BC + CD + DE$$

Il est à noter que le pas d'engrènement diffère du pas de la poulie t_p , ce dernier étant mesuré sur le diamètre primitif de la poulie ($t_p = \text{arc } AE$). Le pas d'engrènement est calculé à partir de quatre paramètres de poulie (figure II.30) :

1. θ demi-angle de creux,
 2. β demi-angle d'enroulement,
 3. r_p rayon de sommet ou de raccordement,
 4. R_p rayon extérieur ou de tête,
- et d'un paramètre courroie :
5. c distance entre le câblage de la courroie et la tête de poulie.

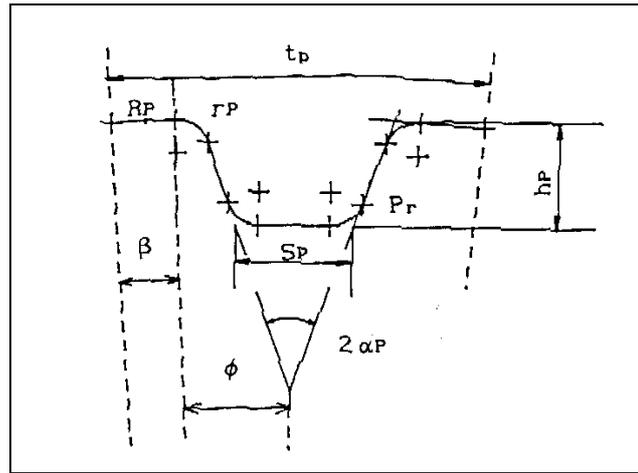


Figure II. 30 : paramètres géométriques de poulie.

On obtient (figure II.29) :

$$t'_p = 2(R_p - r_p) \cdot \sin \phi + 2(r_p + c) \cdot \phi + 2(R_p + c) \cdot \beta \quad \text{Equ. II. 60}$$

◆ Interférences de bases B et C entre la poulie et la courroie

Le pas de courroie t_B et le pas de poulie d'engrènement t'_p n'étant pas égaux, il n'y a pas coïncidence des pas. Cette différence de pas ($\Delta t = t_B - t'_p$) entraîne d'autre type de jeux ou interférences de base. On distingue deux types d'interférences complémentaires (figure II.31) :

Jeux : C(I) du côté du brin tendu

B(I) du côté du brin mou

avec $1 \leq I \leq N$ et N, nombre de dents en contact.

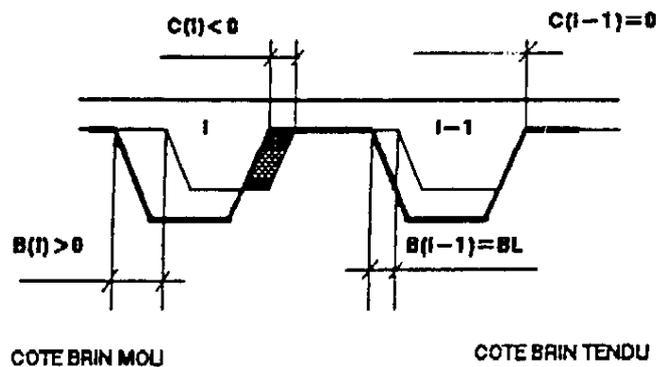


Figure II. 31 : Définition des interférences B et C.

La figure II.32 montre que plusieurs cas peuvent se produire. On notera que les jeux C(I) et B(I) peuvent prendre des valeurs négatives. Dans ce cas, les dents de la courroie sont déjà chargées. Il s'agit donc d'une précharge. Dans certain cas, les efforts seront transmis sur les dents situées du côté du brin mou ($\Delta t < 0$). Inversement, on peut voir que si $\Delta t > 0$, ce sont les premières dents en prises qui transmettront essentiellement les efforts. Pour déterminer les interférences de bases, on peut écrire:

$$C(I) = (I - m) \cdot \Delta t$$

$$B(I) = BL - C(I) \quad \text{pour } 1 \leq I \leq N,$$

où m est un paramètre représentant le point d'équilibre du système poulie - courroie. Le paramètre m est défini tel que $C(m) = 0$. Dans le cas où on porte sur la première dent, $m=N$. Dans le cas où on porte sur la dernière dent, $m = 1$. Le paramètre m est donc compris entre 1 et N . Et ce paramètre n'est pas forcément un nombre entier.

Lorsque les dents sont chargées, c'est-à-dire que les d'interférence sont négatives ($C(I) < 0$ et $B(I) < 0$), la condition d'équilibre sur la partie de la courroie enroulée se traduit par:

$$K \cdot (\sum C(I) < 0) = K \cdot (\sum B(I) < 0) \quad \text{Equ. II. 61}$$

avec K , raideur de la dent et de l'âme de la courroie.

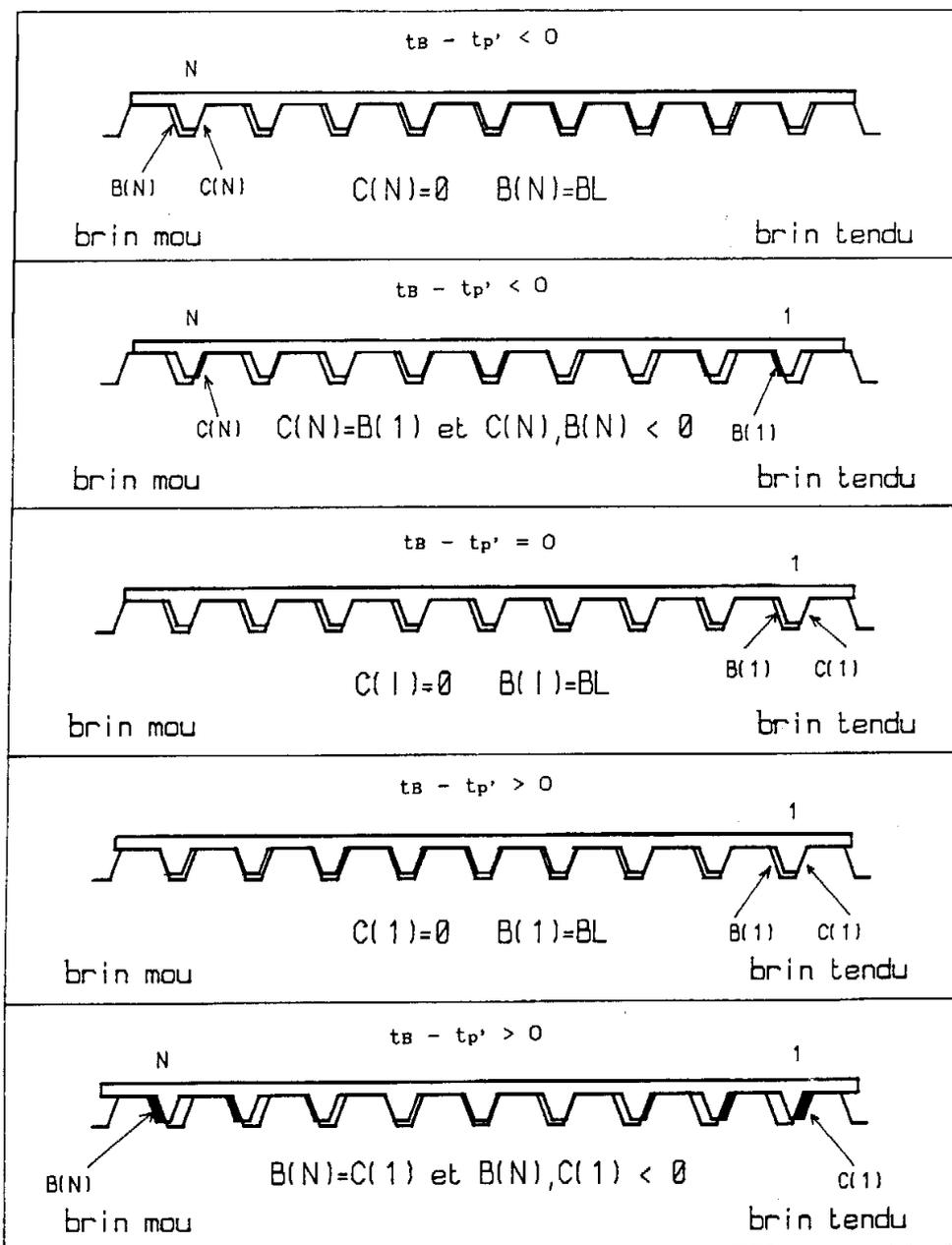


Figure II. 32 : Interférences de bases, cas types.

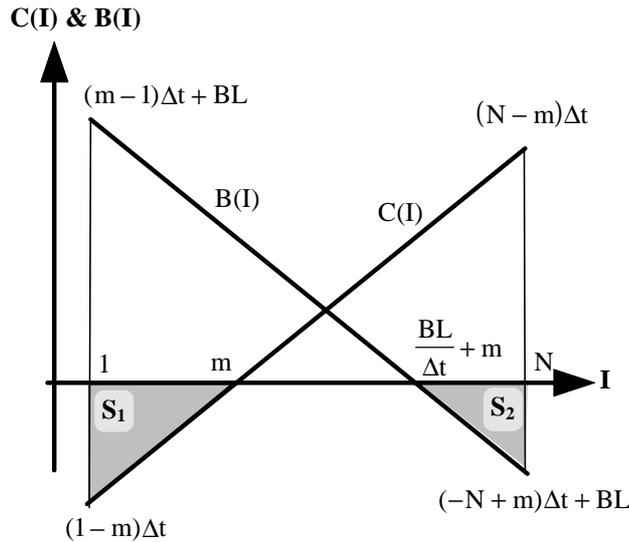


Figure II. 33 : Condition d'équilibre.

On peut écrire:

$$C(I) = I \cdot \Delta t - m \cdot \Delta t$$

$$B(I) = -I \cdot \Delta t + m \cdot \Delta t + BL$$

C(I) et B(I) peuvent être représentées par des "droites" de pentes respectives Δt et $-\Delta t$ (figure II.33). L'équilibre des forces traduite par l'équation II.61 est satisfaite lorsqu'on a égalité des aires S1 et S2 :

$$(m-1) = N - \frac{[m + BL / (t_B - t'_p)]}{2}$$

Cette équation permet de déterminer le paramètre m en fonction de N (nombre de dents en contact), BL (jeu entre les dents) et la différence de pas $\Delta t = (t_B - t'_p)$. On déduit les interférences de base:

$$C(I) = (I - m) \cdot (t_B - t'_p)$$

$$B(I) = BL - C(I) \quad \text{pour } 1 \leq I \leq N$$

II.3.4.2.2. Modèle de répartition des charges sur les dents engrenées

Il s'agit d'un modèle déroulé bi-axial avec frottement développé sur la base du modèle uniaxiale de J.-M. Dancé. Les paramètres de la géométrie d'engrènement, comme le jeu et les interférences de bases, sont considérés constant tout au long de l'arc d'enroulement, bien que cela ne soit pas le cas, notamment près des zones d'engrènement. Le problème est discrétisé en pas (figure II.34 a). Le calcul des charges tangentielles de la courroie est ramené sur l'axe longitudinal de la courroie (figure II.34 b) en intégrant les charges radiales (figure II.37 page 128). Nous ne disposons ainsi que d'une seule équation de projection. Cette hypothèse simplificatrice revient à dérouler la courroie. Le frottement est introduit au niveau du contact de l'âme sur la partie supérieure de la dent de poulie. L'effet de la force centrifuge (décollement de la courroie au niveau des zones de frottement et pression radiale moindre s'appliquant sur la dent) est implicitement prise en compte en prenant la tension effective dans les brins (annexe IV).

◆ Équations d'équilibre sur un pas de courroie (figure II.34)

Équilibre d'une dent :

$$T'(I) = T(I-1) - Q(I) \text{ pour } 2 < I < N-1 \quad \text{Equ. II. 62}$$

avec $T'(1) = T - Q(1)$
 $t = T'(N) = T(N-1) - Q(N)$

N : nombre de dents en contact défini d'après l'angle d'enroulement α (figure II.17) et le nombre de dents dégrénées à cause de la forme courbe du brin,
 T : tension dans le brin tendu,
 t : tension dans le brin mou.

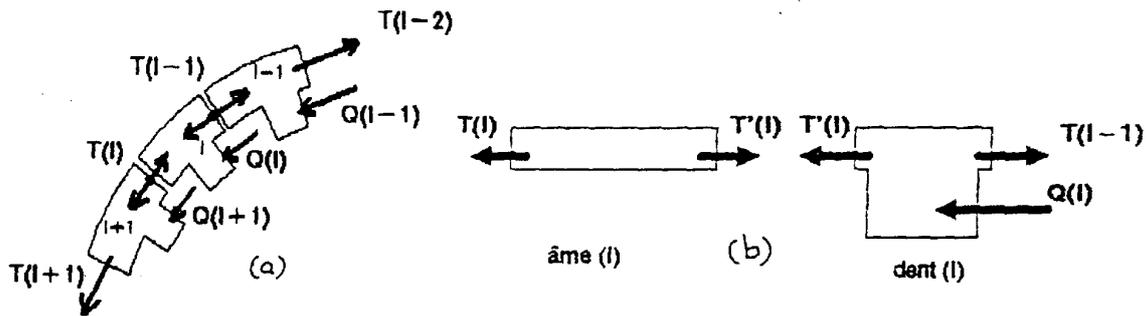


Figure II. 34 : Équilibre dans le sens longitudinal.

Équilibre de l'âme :

Les deux cas, poulie menante ($C + I\ddot{\theta} > 0$) et poulie menée ($C + I\ddot{\theta} < 0$), doivent être dissociées en raison du sens du frottement. Si la poulie est libre ($C + I\ddot{\theta} = 0$), aucun frottement n'est considéré (coefficient de frottement f nul). La loi d'Euler est appliquée sur un arc δ_p caractérisant le glissement fonctionnel de la courroie sur le sommet de dent de poulie. L'arc de glissement δ_p peut être égal (patinage de la courroie) à l'angle β' d'enroulement de la dent de poulie (figure II.29) ou nul (adhérence totale). Nous avons donc :

$$0 \leq \delta_p \leq \beta'$$

Équilibre pour la poulie menée (figure II.35) : La dent passe de la position $i+1$ à la position i . Si le déplacement réel de la dent $\lambda(I+1)$ est inférieur au déplacement réel de la dent $\lambda(I)$ alors la courroie se déplace de $i+1$ vers i , sinon la courroie se déplace de i vers $i+1$.

$$\begin{aligned} \lambda(I+1) < \lambda(I) & \text{ alors } T'(I) = e^{f2\beta} \cdot T(I) \\ \lambda(I+1) > \lambda(I) & \text{ alors } T'(I) = e^{-f2\beta} \cdot T(I) \end{aligned} \quad \text{Equ. II. 63}$$

Équilibre pour la poulie menante (figure II.35) : La dent passe de la position i à la position $i+1$. Si le déplacement réel de la dent $\lambda(I)$ est supérieur au déplacement réel de la dent $\lambda(I+1)$ alors la courroie se déplace de i vers $i+1$.

$$\begin{aligned} \lambda(I+1) < \lambda(I) & \text{ alors } T'(I) = e^{-f2\beta} \cdot T(I) \\ \lambda(I+1) > \lambda(I) & \text{ alors } T'(I) = e^{f2\beta} \cdot T(I) \end{aligned} \quad \text{Equ. II. 64}$$

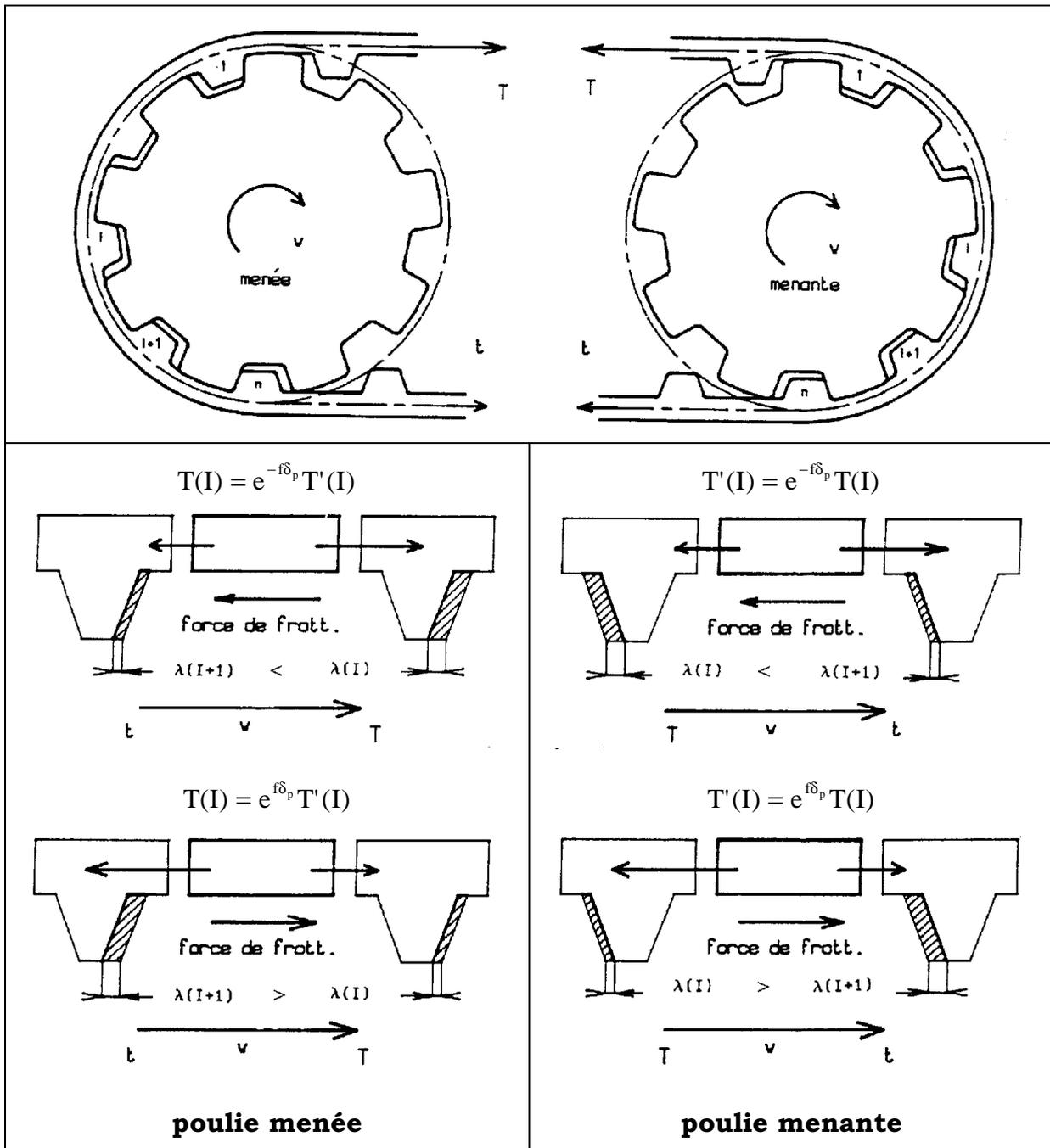


Figure II. 35 : Différence entre poulie menante et menée.

◆ Relation entre le déplacement des dents

Le déplacement d'une dent comprend sa déformation propre et son glissement sur le flanc du creux de poulie. On peut écrire que le déplacement de la dent I est égal au déplacement de la dent $I-1$, moins l'allongement du pas $I-1$:

$$\delta(I) = \delta(I-1) - A\lambda(I-1) \text{ pour } I = 2, N \quad \text{Equ. II. 65}$$

$\delta(I)$: déplacement de la dent I (sans interférences),

$A\lambda(I)$: allongement du pas I .

Soit N-1 équations supplémentaires. Ces relations sont établies pour une différence de pas nulle (sans interférences).

◆ Relation entre le déplacement réel λ et le déplacement sans interférence δ

Compte tenu des interférences C(I) et B(I) dues à la différence de pas, il faut soit ajouter, soit retrancher au déplacement $\delta(I)$, l'interférence C(I) ou B(I), afin d'obtenir le déplacement réel $\lambda(I)$. La figure II.36 résume les différents cas :

$\delta(K) > 0$: le déplacement sans interférence de la dent est du côté brin tendu.

$\delta(K) < 0$: le déplacement sans interférence de la dent est du côté brin mou.

En résumé, et en fonction des différents tests, le déplacement réel $\lambda(K)$ peut prendre une des trois valeurs suivantes :

$$\lambda(I) = \delta(I) - C(I)$$

$$\lambda(I) = \delta(I) + B(I)$$

$$\lambda(I) = 0$$

Equ. II. 66

C(I), B(I) : interférences de base

$\lambda(I)$: déplacement réel de la dent (I)

$\delta(I)$: déplacement sans interférences de la dent (I)

◆ Relation allongement de pas et charge dans l'âme

Il s'agit d'une relation expérimentale définie au chapitre III.4 :

$$Al(I) = \sum_{i=1}^5 a_i \cdot T^i(I) \quad \text{Equ. II. 67}$$

fonction polynomiale de degré 5, de coefficient a_i , et de variable T, tension dans l'âme.

◆ Relation déplacement de la dent et charge sur la dent

Il s'agit d'une relation expérimentale définie au chapitre III.4 :

$$Q_x(I) = \left(\sum_{i=1}^5 b_i \cdot \lambda^i(I) \right) \cdot Q_y(I) \quad \text{Equ. II. 68}$$

fonction polynomiale de degré 5, de coefficient b_i , et de variables λ , déplacement réel de la dent et Q_y , charge radiale sur la dent.

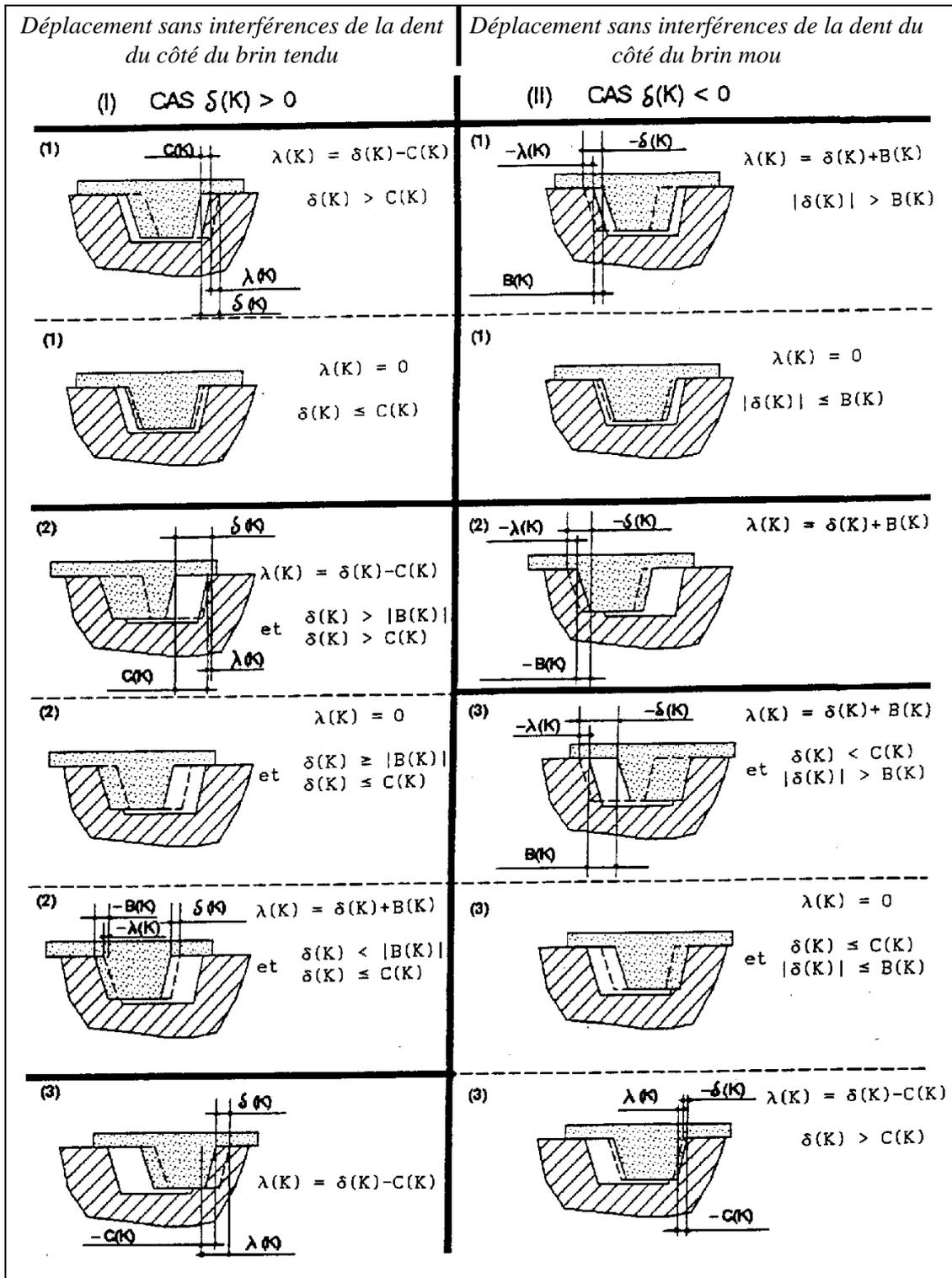


Figure II. 36 : Déplacement réel de la dent.

Les essais permettent de déterminer les lois globales de comportement sur l'axe principal de la courroie. Cet axe principal coïncide avec la nappe de câbles de la courroie. On peut ainsi déduire du calcul toutes les données relatives à cet axe principal, c'est-à-dire les tensions $T(I)$, $T'(I)$ et la charge $Q_x(I)$ (projection de la charge sur la dent sur l'axe principal).

Les tensions $T(I)$ et $T(I-1)$ qui s'appliquent de part et d'autre d'un pas de courroie I (figure II.37) sont peu différentes (quelques Newton au plus). On peut donc évaluer la charge radiale $Q_y(I)$ sur une dent I d'après la moyenne des tensions $(T(I) + T(I-1)) / 2$ s'appliquant sur un pas de courroie :

$$Q_y(I) = \left(\frac{T(I-1) + T(I)}{2} \right) \sin \frac{\beta + \phi}{2} \quad \text{Equ. II. 69}$$

avec $\beta + \phi = 2\pi/Z$ pas angulaire de la poulie (figure II.29 page 120),

Z nombre de dents de la poulie.

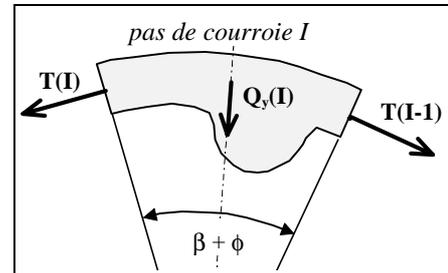


Figure II. 37 : Calcul de $Q_y(I)$

Il faut alors résoudre le système d'équations II.62 à II.69 par une méthode de résolution itérative. La difficulté vient des déplacements réels $\lambda(I)$, $\lambda(I+1)$ qui conditionnent le sens du frottement sur la poulie. Un premier calcul itératif sans frottement permet d'évaluer approximativement ces déplacements et par conséquent le sens du frottement. Le calcul itératif peut alors être repris en intégrant le coefficient de frottement. Naturellement, il faut vérifier les sens de frottement. Si les tests $\lambda(I) < \lambda(I+1)$ ou $\lambda(I) > \lambda(I+1)$ sont validés, alors le calcul est terminé. Sinon, il faut itérer jusqu'à validation des tests. La figure II.38 illustre l'algorithme de calcul sans frottement qui permet d'approcher les déplacements réels $\lambda(I)$. La recherche s'effectue par dichotomie en encadrant largement le déplacement sur la première dent de contact. On calcule alors $T(N)$ qui doit être la tension dans le brin mou t . Le test d'arrêt de l'itération est alors défini par l'égalité de $T(N)$ avec t . L'algorithme de la figure II.39 est répété jusqu'à ce que les tests sur les déplacements soient satisfaisants.

Dans certains cas, la solution exacte ne peut être trouvée. Un test supplémentaire de convergence a été introduit afin d'assurer la convergence du programme de calcul. Un test d'accélération de la convergence a été également introduit de manière à accélérer le calcul et afin d'éviter le dépassement de la limite physique sur les déplacements de dent (ce qui correspondrait au saut de dent).

Enfin, une dernière boucle est faite sur l'ensemble du programme de répartition des charges selon la charge radiale Q_y calculée à partir des tensions $T(I)$. Une à deux itérations suffisent généralement.

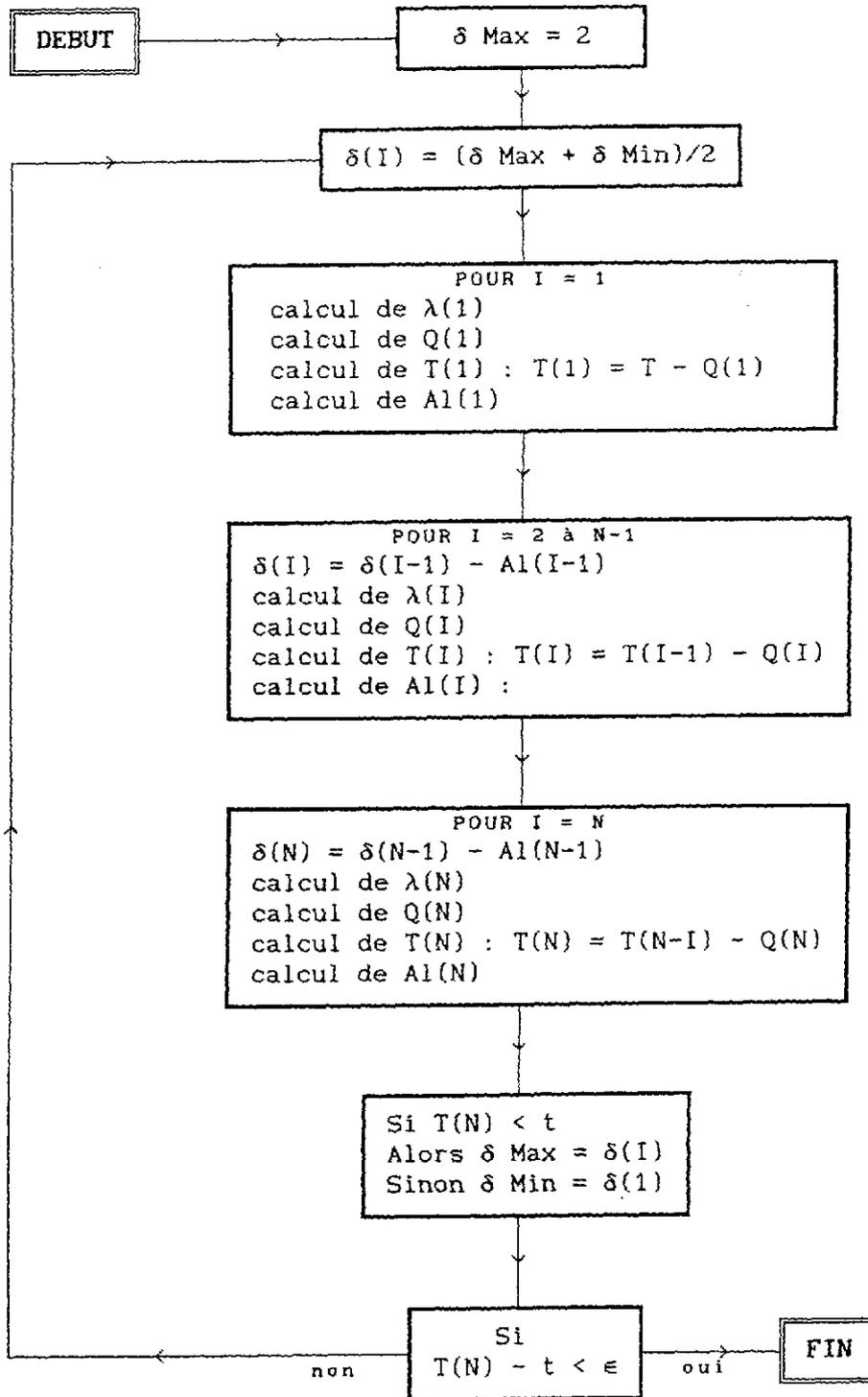


Figure II. 38 : Algorithme de la phase itérative sans frottement.

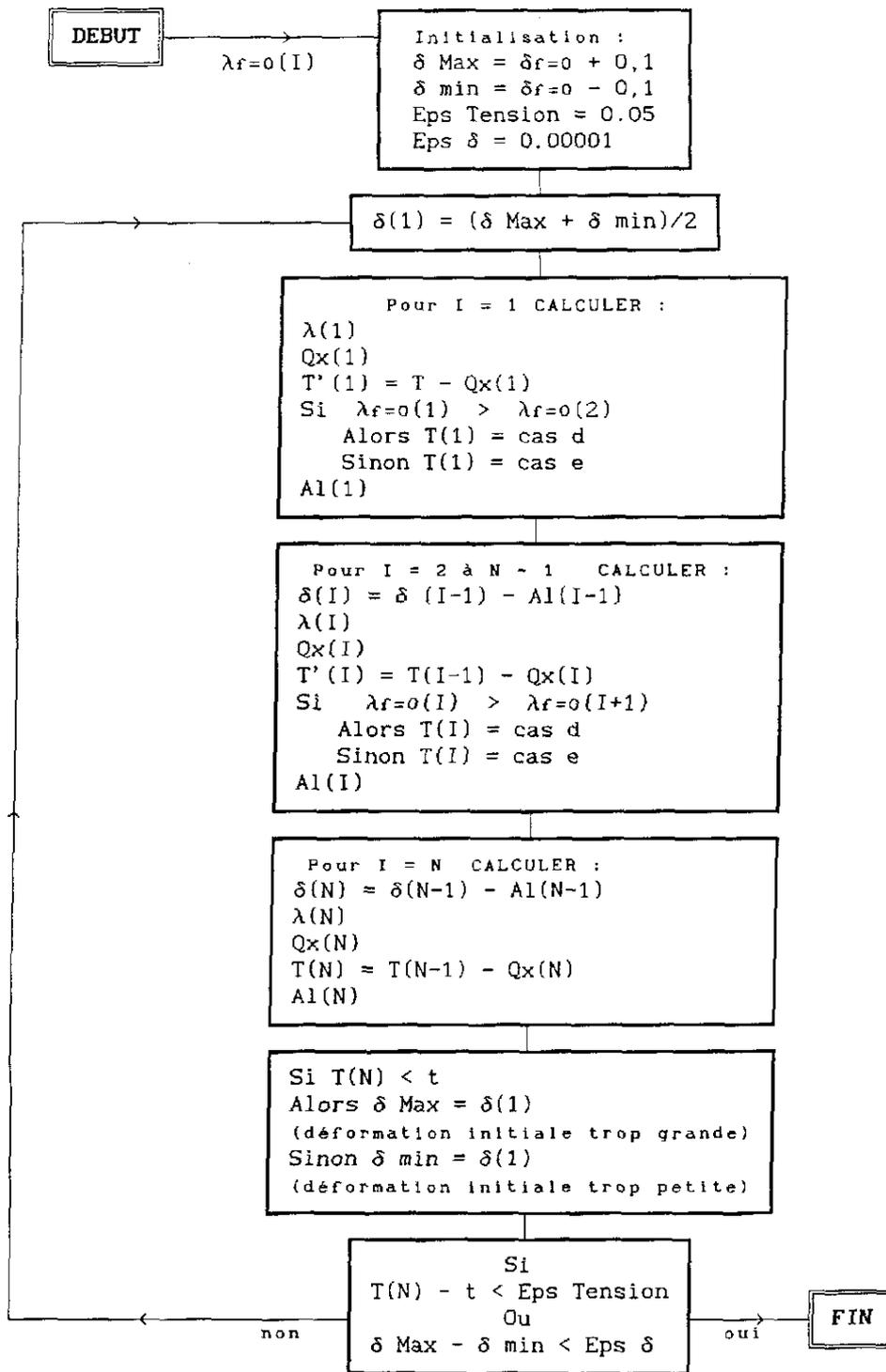


Figure II. 39 : Algorithme de la phase itérative avec frottement (poulie menée).

II.3.5. 4^{ème} module : Calcul des raideurs et amortissements équivalents pour le modèle final

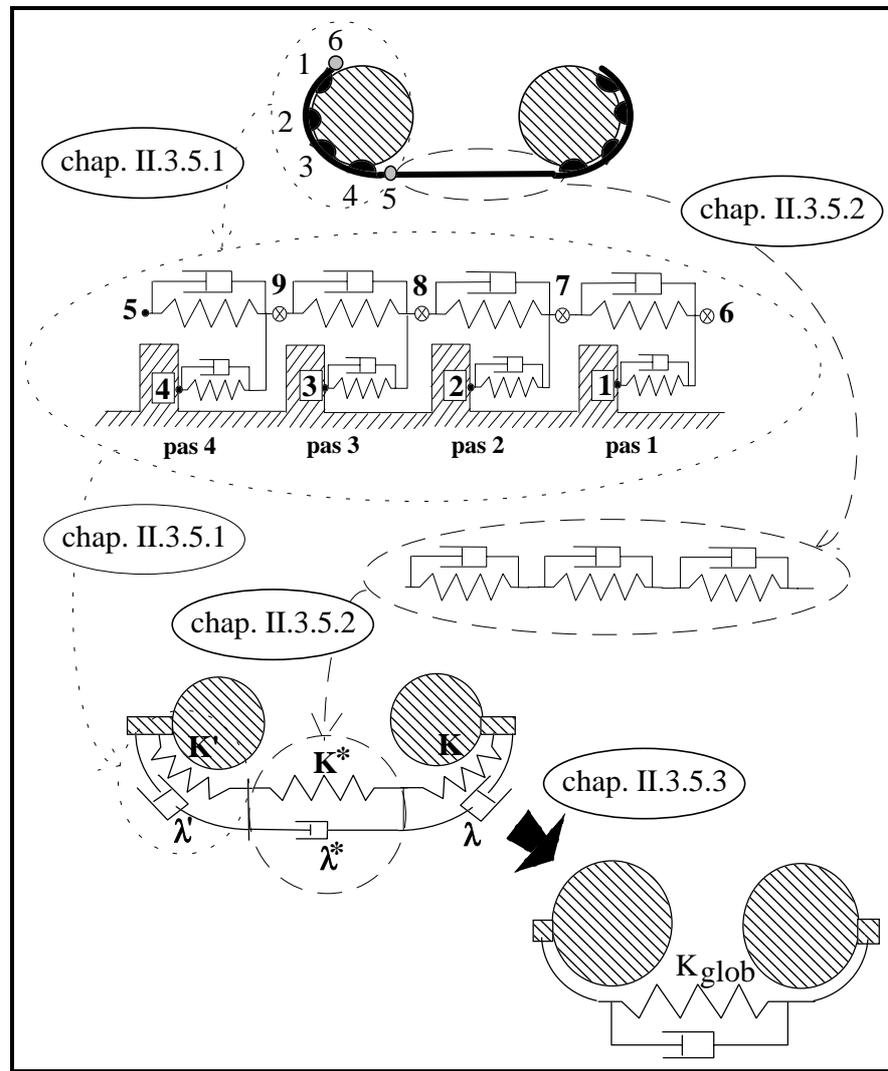


Figure II. 40 : Étapes pour la réduction du modèle.

Ce module a pour tâche de simplifier considérablement le calcul d'équation du mouvement. L'aspect local au niveau des arcs d'enroulement est pris en charge au niveau du 3^{ème} module (chapitre II.II.3.4). L'aspect macroscopique est le sujet de ce 4^{ème} module. Strictement, le modèle dispose trois degrés de liberté de translation longitudinale par pas de courroie (deux au niveau de l'âme et un au niveau de la dent). Cette pléthore de variables (la courroie utilisée pour cette étude possède 250 pas) entraîne un surdimensionnement du système en regard des besoins. En effet, seul nous intéresse au niveau macroscopique la rotation θ des poulies et leurs déplacements horizontal u , et vertical v ; et non la déformation de chaque pas et de chaque dent sur toute la courroie. De plus, le temps et l'imprécision du calcul numérique sur les systèmes matriciels est généralement proportionnel à N^3 (N dimension du système). On a donc un gros intérêt à réduire au maximum le nombre de variables. Le but poursuivi est donc la réduction du modèle afin de ne retrouver plus que trois degrés de liberté par poulie : La rotation θ et les déplacements horizontal u et vertical v .

Dans ce but, une partie de la transmission, deux poulies avec leur lien, est isolée (figure II.40). La transmission complète est alors la somme de ces parties élémentaires de la transmission. Chaque pas de courroie est modélisé par deux couples de ressort - amortisseur sans masse (dent et âme). Le chapitre II.II.3.5.1 proposera une méthode pour réduire les parties enroulées de la courroie sur les poulies dentées. Le chapitre II.II.3.5.2 s'appliquera à réduire les brins libres et les brins enroulés sur un galet. Le chapitre II.II.3.5.3 fera la synthèse pour aboutir à un modèle final très simple.

II.3.5.1. Raideurs et amortissements équivalents pour les brins de courroie enroulés

Une poulie isolée avec son brin de courroie enroulée (figure II.41 a) et dont une extrémité est fixe, constitue un oscillateur. L'équation du mouvement de cet oscillateur est :

$$-C_i + I_i \ddot{\theta}_i = -Y_H \sum_{d=1}^N Q_x(\theta_i)(d) - R_i \sum_{d=1}^N Q_f(\theta_i)(d) \quad \text{Equ. II. 70}$$

- avec C_i couple appliqué sur la poulie i ,
- I_i moment d'inertie de la poulie i par rapport à son axe de rotation,
- θ_i angle de rotation de la poulie i ,
- $Q_x(d)$ effort de la dent de courroie d sur la poulie,
- N nombre de dents de courroie enroulées sur la poulie,
- $Q_f(d)$ effort dû au frottement de la courroie sur le sommet de la dent de poulie.

Dans le but de simplifier l'équation II.70, l'angle de rotation θ_i est décomposé selon sa valeur (figée) à un instant donné ou de référence t , $\theta_i|_t$, et son accroissement à l'instant postérieur $t+\Delta t$, $\Delta\theta_i$:

$$\theta_i|_{t+\Delta t} = \theta_i|_t + \Delta\theta_i \quad \text{Equ. II. 71}$$

L'accélération de la rotation est alors $\ddot{\theta}_i = \Delta\ddot{\theta}_i$. L'effort Q_x d'une dent dépend de sa déformation λ dépendant elle-même de la rotation de la poulie. Pareillement, la force de frottement $Q_f = T_i(e^{f\delta_p} - 1)$ dépend de la tension T_i dans l'âme et par conséquent de la rotation de la poulie. Nous pouvons donc écrire au premier ordre :

$$Q_x(\theta_i|_{t+\Delta t}) = Q_x(\theta_i|_t) + \underbrace{\frac{dQ_x}{d\theta_i}}_{\substack{\text{raideur non linéaire} \\ \text{de la dent au point} \\ \text{d'équilibre de référence}}} \bigg|_{\theta_i|_t} \Delta\theta_i \quad \text{Equ. II. 72}$$

$$Q_f(\theta_i|_{t+\Delta t}) = Q_f(\theta_i|_t) + \underbrace{\frac{dQ_f}{d\theta_i}}_{\substack{\text{taux d'accroissement} \\ \text{de la force de frottement}}} \bigg|_{\theta_i|_t} \Delta\theta_i \quad \text{Equ. II. 73}$$

Le comportement de la courroie enroulée est non linéaire. Le problème est linéarisé

autour du point de fonctionnement ou de référence (équation II.72 et II.73) déterminé par le modèle de répartition des charges sur l'arc enroulé (chapitre II.II.3.4.2.2). L'équilibre à l'instant de référence peut maintenant se définir comme suit :

$$C_i = Y_H \sum_{d=1}^N Q_x(\theta_i|_t)(d) + R_i \sum_{d=1}^N Q_f(\theta_i|_t)(d) \quad \text{Equ. II. 74}$$

Le couple de la poulie i est équilibré à un instant donné par l'action des dents de courroie sur les dents de poulie et par l'action du frottement de la courroie sur les dents de poulie. En simplifiant l'équation II.70 avec les équations II.72, II.73, II.74, nous obtenons l'équation du mouvement simplifiée autour du point de référence :

$$I_i \Delta \ddot{\theta}_i + \left[Y_H \sum \frac{dQ_x}{d\theta} \Big|_{\theta_i|_t} + R_i \sum \frac{dQ_f}{d\theta} \Big|_{\theta_i|_t} \right] \Delta \theta_i = 0 \quad \text{Equ. II. 75}$$

L'équation du mouvement II.75 est celle d'un oscillateur simplifié ou équivalent (figure II.41 c). Nous constatons que la force due au frottement intervient toujours ce qui complique sensiblement l'établissement d'une rigidité équivalente $K_{\text{équi}} = \left[Y_H \sum \frac{dQ_x}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_{i,s}} + R_i \sum \frac{dQ_f}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_{i,s}} \right]$ pour une position d'équilibre donnée.

La détermination de la rigidité équivalente pour les brins enroulés est établie à partir du modèle déroulé de la figure II.41 b. Sur cette figure, est représentée, l'ensemble des pas de courroie enroulé sur une poulie.

La figure II.41 b définit les conditions aux limites telles qu'elles ont été entérinées par la validation statique du modèle (chapitre III.5.2). Le nœud N+1 est bloqué ($x_{N+1} = 0$) alors que le nœud N+2 est libre ($T_{N+2} = 0$). Les nœuds 1 à N de dent de courroie subissent un déplacement $R_i \theta_{i,v}$ à une vitesse $R_i \dot{\theta}_{i,v}$ dû à la rotation de la poulie θ_i . Les ressorts de raideurs k_i (raideur de la dent i) sont reliés aux ressorts de raideur $K_{\hat{a}}$ (raideur de l'âme) aux nœuds N+2 à 2N+1. L'objectif est de trouver la tension au nœud N+1 en fonction du déplacement et de la vitesse des nœuds 1 à N. Le rapport à ce déplacement et à cette vitesse donnera pour le nœud N+1 la rigidité équivalente K_i et l'amortissement équivalent λ_i .

La raideur k_I de la dent I est obtenue en dérivant la relation expérimentale II.68 par rapport au déplacement de la dent λ :

$$k_I(\lambda) = \frac{\partial Q_x}{\partial \lambda} (I)(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^4 i. b_i. \lambda^i(I) \right). Q_y(I) \quad \text{Equ. II. 76}$$

La raideur de chaque dent I est obtenue à partir des valeurs de déplacements $\lambda(I)$ et de la charge radiale $Q_y(I)$ calculée lors de la position de référence calculée au deuxième module. La raideur K_I de l'âme est obtenue également en dérivant la relation force(déplacement) $T(AI(I))$ obtenue expérimentalement (inverse à la relation II.67), par rapport au déplacement AI de l'âme sur un pas :

$$k_1(\lambda) = \sum_{i=1}^4 c_i \cdot A^i(I) \tag{Equ. II. 77}$$

Il peut arriver pour des différences de pas extrêmes entre la poulie et la courroie, qu'une partie des dents de l'arc enroulée portent sur les flancs passifs des dents de la poulie, alors que la plus grande partie de la denture enroulée de la courroie se porte sur les flancs actifs des dents de la poulie. Néanmoins, nous remarquons sur la figure II.41 (b) que les dents de courroie portent toutes (ou ne portent pas si la raideur est nulle) sur le même flanc actif des dents de poulie. Cela nécessite de poser l'hypothèse selon laquelle le pas d'enroulement de la courroie ne soit pas trop différent de celui du pas de la poulie pour éviter qu'une dent porte sur le flanc opposé.

La relation classique force-déplacement pour un ressort dont les nœuds sont i et j s'écrit :



$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} \tag{Equ. II. 78}$$

Avec l'opérateur \otimes qu'on observe sur la figure II.41 b, La relation force - déplacement pour un ressort devient lorsqu'on tient compte du frottement sur la partie supérieure des dents de poulie :



$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -e^{-\eta f \delta_p} & e^{-\eta f \delta_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} \tag{Equ. II. 79}$$

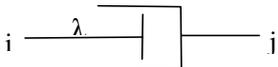
avec $\eta = \pm 1$ selon le sens de la force de frottement entre la poulie et la courroie, calculé lors de l'équilibre statique (équ. II.63 et 64),
 f coefficient de frottement,
 δ_p angle de non adhérence.

Le relation II.79 est employée pour tous les ressorts situés à droite ou en dessous d'un nœud marqué du signe \otimes . Par exemple, pour le ressort de dent situé entre les nœuds 1 et N+2 (figure II.41 b), nous avons :

$$\begin{Bmatrix} T \\ T' \end{Bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -e^{-\eta f \delta_p} & e^{-\eta f \delta_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_{N+2} \end{Bmatrix} \tag{Equ. II. 80}$$

L'explication de l'emploi de cette forme de matrice inusitée est fournie en annexe III.

Une relation identique à l'équation II.78 est utilisée pour un amortisseur visqueux :



$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_j \end{Bmatrix} \tag{Equ. II. 81}$$

L'équilibre global du système ressort - amortisseur pour chaque nœud permet d'obtenir en

associant toutes les matrices comme l'équation II.80, l'équation II.82.

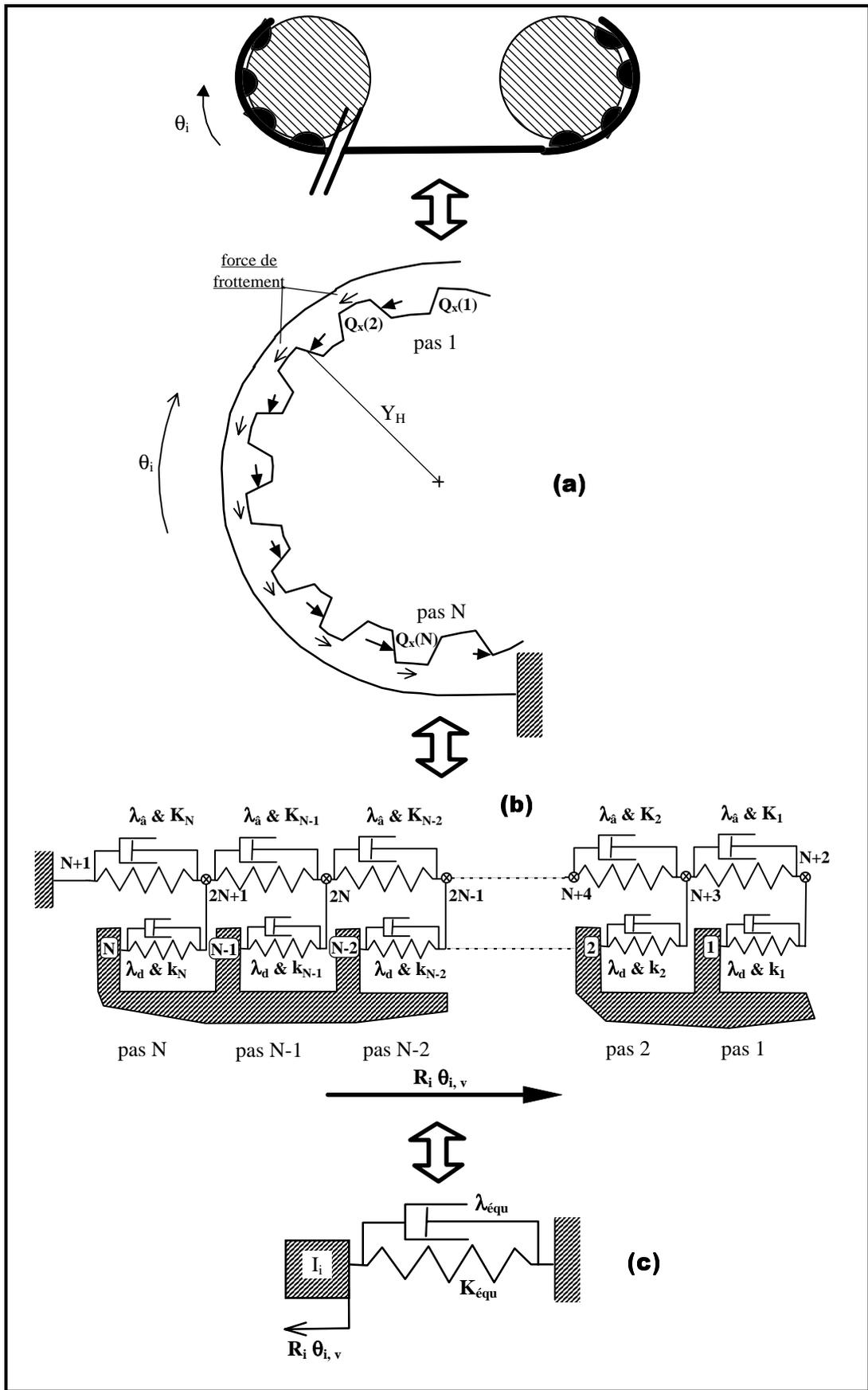
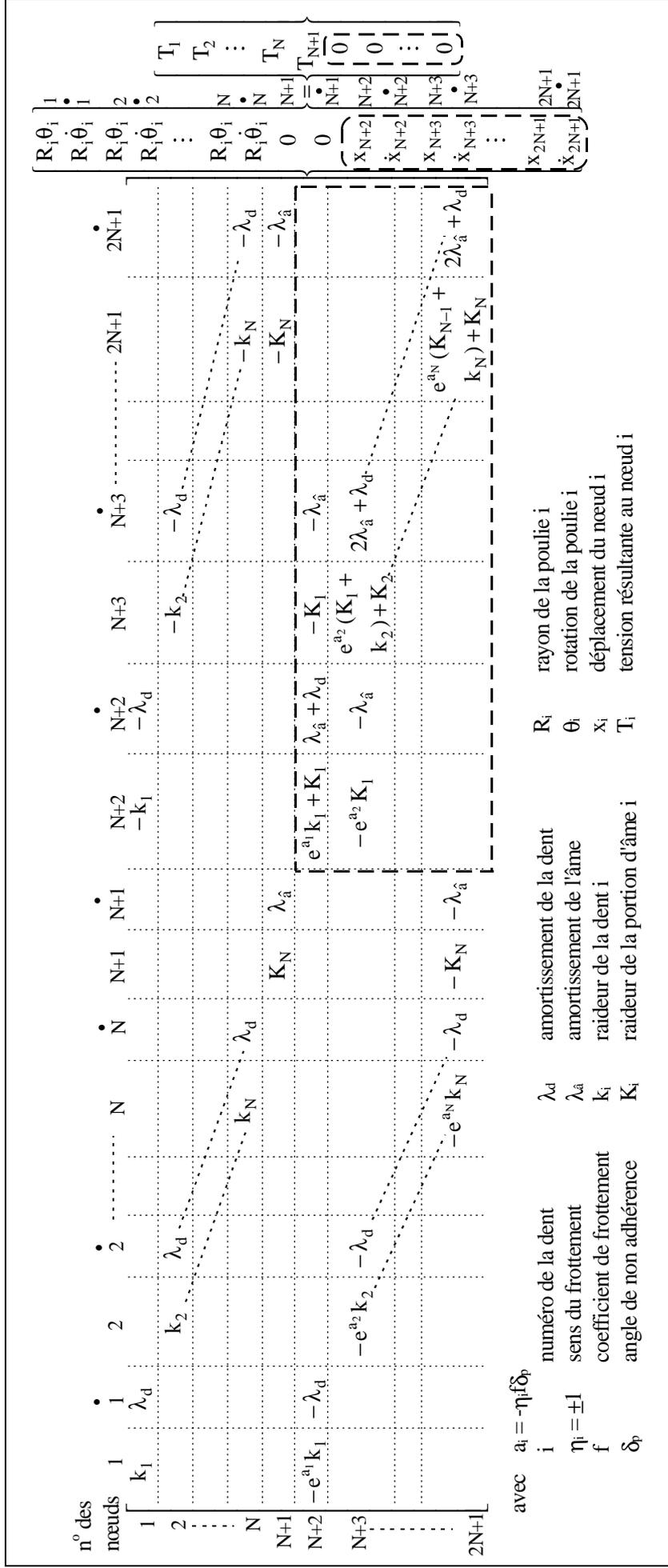


Figure II. 41 : Rigidité et amortissement équivalent pour les brins enroulés.



Equ. II. 82 : Équilibre pour chaque nœud du modèle déroulé d'un brin de courroie en prise sur une poulie dentée.



L'équation II.82 peut se réécrire de la façon suivante :

$$[D].\{V\} = \{T\} \quad \text{id. Equ. II.82}$$

avec $[D]$ matrice de la forme : $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & [E] \end{bmatrix}$ ($[E]$ étant la matrice encadrée d'un trait

discontinu gras page 136),

$\{V\}$ vecteur déplacement/vitesse :

$$\langle r_i \theta_i \quad r_i \dot{\theta}_i \quad \dots \quad r_i \theta_i \quad r_i \dot{\theta}_i \quad x_{N+1} = 0 \quad \dot{x}_{N+1} = 0 \quad x_{N+2} \quad \dot{x}_{N+2} \quad \dots \quad x_{2N+1} \quad \dot{x}_{2N+1} \rangle$$

$\{T\}$ vecteur second membre tension résultante aux nœuds :

$$\langle T_1 \quad \dots \quad T_{N+1} \quad T_{N+2} = 0 \quad \dots \quad T_{N+1} = 0 \rangle$$

L'objectif est de calculer la tension T_{N+1} en fonction de la rotation de la poulie θ_i . L'équation II.82 montre que la tension T_{N+1} dépend du déplacement et de la vitesse au nœud $2N+1$:

$$T_{N+1} = -K_N x_{2N+1} - \lambda_{\hat{a}} \dot{x}_{2N+1} \quad \text{Equ. II. 83}$$

L'interdépendance des nœuds nous astreint au calcul du déplacement et de la vitesse de tous les nœuds pour connaître le déplacement et la vitesse au nœud $2N+1$. Dans cet objectif, on écrit le sous-système déduit de l'équation II.82 :

$$[E] \begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \end{Bmatrix} = \{S\} \quad \text{Equ. II. 84}$$

$$\text{avec } \{X\} = \begin{Bmatrix} x_{N+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2N+1} \end{Bmatrix} \quad \text{et } \{\dot{X}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{N+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{2N+1} \end{Bmatrix}$$

$$\text{et } \{S\} = \{A\}r_i\theta_i + \{B\}r_i\dot{\theta}_i$$

L'équation se décompose alors suivant cette équation différentielle au premier ordre de dimension N :

$$[K]\{X\} + [\lambda]\{\dot{X}\} = \{A\}r_i\theta_i + \{B\}r_i\dot{\theta}_i \quad \text{Equ. II. 85}$$

avec :

$$[K] = \begin{bmatrix} e^{a_1}k_1 + K_1 & -K_1 & 0 & \dots & 0 \\ -e^{a_2}K_1 & e^{a_2}(k_2 + K_1) + K_2 & -K_2 & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & e^{a_{N-1}}(k_{N-1} + K_{N-2}) + K_{N-1} & \dots & -K_{N-1} \\ 0 & \dots & -e^{a_N}K_{N-1} & e^{a_N}(k_N + K_{N-1}) + K_N & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{a}} + \lambda_d & -\lambda_{\bar{a}} & & 0 \\ -\lambda_{\bar{a}} & 2\lambda_{\bar{a}} + \lambda_d & & -\lambda_{\bar{a}} \\ 0 & & -\lambda_{\bar{a}} & 2\lambda_{\bar{a}} + \lambda_d \end{bmatrix}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} e^{a_1} k_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{a_N} k_N \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{B\} = \begin{Bmatrix} \lambda_d \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_d \end{Bmatrix}$$

La solution générale $\{X\}$ de l'équation II.85 est constituée d'une solution particulière $\{X_1\}$ indépendante du temps et de la solution $\{X_2\}$ à l'équation homogène constituant la partie transitoire. Cependant, des simulations montrent que la partie transitoire est négligeable en raison de sa brièveté. La validation statique a permis de confirmer le rejet de la partie transitoire. On ne retient donc que la partie asymptotique : $\{X\} = \{X_1\}$. La solution particulière $\{X_1\}$ vérifie l'équation suivante :

$$[K]\{X\} = \{A\}r_i\theta_i + \{B\}r_i\dot{\theta}_i \quad \text{Equ. II. 86}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \{X\} &= [K]^{-1}\{A\}r_i\theta_i + [K]^{-1}\{B\}r_i\dot{\theta}_i \\ &= \{A'\}r_i\theta_i + \{B'\}r_i\dot{\theta}_i \end{aligned} \quad \text{Equ. II. 87}$$

Le calcul de $\{A'\}$ et de $\{B'\}$ est effectué numériquement avec la méthode d'inversion de matrice LU (décomposition en matrice triangulaire Left - Upper). La vitesse $\{\dot{X}\}$ est obtenue en comparant le déplacement $\{X^i\}$ à l'itération i de l'intégration de l'équation du mouvement (figure II.15), avec le déplacement $\{X^{i-1}\}$ à l'itération précédente :

$$\{\dot{X}\} = \frac{\{X^i - X^{i-1}\}}{\Delta t} = \{C'\}r_i\theta_i + \{D'\}r_i\dot{\theta}_i \quad \text{Equ. II. 88}$$

avec Δt , pas de temps d'intégration des équations du mouvement.

L'équation II.83 permet alors d'obtenir la tension au nœud $N+1$ proportionnée à $r_i\theta_{i,v}$ et $r_i\dot{\theta}_{i,v}$:

$$\begin{aligned} T_{N+1} &= -\underbrace{[K_N A' (2N + 1) + \lambda_{\bar{a}} C' (2N + 1)]}_{\text{raideur équivalente } K_{\text{éq}}} r_i \theta_i \\ &\quad - \underbrace{[K_N B' (2N + 1) + \lambda_{\bar{a}} D' (2N + 1)]}_{\text{amortissement équivalent } \lambda_{\text{éq}}} r_i \dot{\theta}_i \end{aligned} \quad \text{Equ. II. 89}$$

La raideur $K_{\text{éq}}$ et l'amortissement équivalent $\lambda_{\text{éq}}$ des brins enroulés sont déterminés par l'équation II.89. Le terme $r_i\theta_i$ étant une longueur, la raideur $K_{\text{éq}}$ est bien en N/m et par conséquent compatible avec la raideur des brins libres.



II.3.5.2. Raideurs et amortissements équivalents pour les brins libres de courroie et les brins enroulés sur les galets

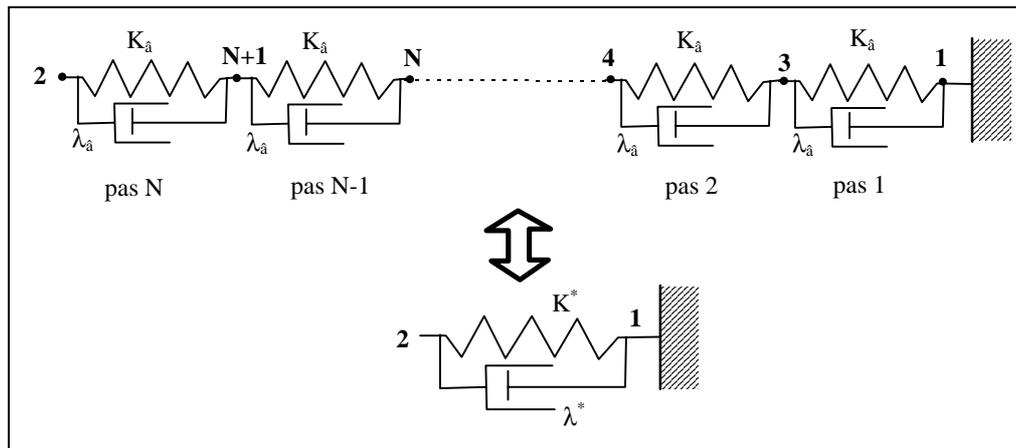


Figure II. 42 : Rigidité et amortissement équivalent pour les brins libres et les brins enroulés sur les galets.

La figure II.42 montre la schématisation d'un brin libre avec N pas de courroie. Le nombre de pas est déterminé par le rapport de la longueur l_i du brin libre (figure II.17) ajoutée de la longueur de courroie enroulée sur un éventuel galet, et de la longueur d'un pas. Le noeud 1 est bloqué et le noeud 2 est libre. Chaque pas de courroie est modélisé par un ressort de raideur K_a et un amortisseur de coefficient λ_a . L'amortissement λ_a est une donnée expérimentale. La tension dans le brin T permet de connaître la déformation d'un pas de courroie en utilisant la relation expérimentale II.67. Ensuite, la relation II.77 donne la raideur K_a de l'âme pour un pas de courroie. Dans le but de la détermination de la raideur équivalente, nous cherchons la tension nécessaire au point 2 (T_2) pour produire un déplacement x_2 avec une vitesse \dot{x}_2 .

L'équilibre global du système ressort - amortisseur pour chaque nœud du brin libre permet d'obtenir en utilisant les matrices II.78 et II.81, l'équation II.90 :

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & \dot{1} & 2 & \dot{2} & 3 & \dot{3} & 4 & \dot{4} & & N & \dot{N} & N+1 & \dot{N+1} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ N \\ N+1 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 K_a & \lambda_a & & & -K_a & -\lambda_a & & & & & & & \\
 & & K_a & \lambda_a & & & & & & & & -K_a & -\lambda_a \\
 -K_a & -\lambda_a & & & 2K_a & 2\lambda_a & -K_a & -\lambda_a & & & & & \\
 & & & & -K_a & -\lambda_a & 2K_a & 2\lambda_a & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 2K_a & 2\lambda_a & -K_a & -\lambda_a \\
 & & -K_a & -\lambda_a & & & & & & -K_a & -\lambda_a & 2K_a & 2\lambda_a
 \end{array} \right] \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \\ x_4 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ x_N \\ \dot{x}_N \\ x_{N+1} \\ \dot{x}_{N+1} \end{matrix} = \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

Equ. II. 90

Il vient de l'équation II.90 :

$$T_2 = K_{\hat{a}}(x_2 - x_{N+1}) + \lambda_{\hat{a}}(\dot{x}_2 - \dot{x}_{N+1}) \quad \text{Equ. II. 91}$$

La connaissance du déplacement et de la vitesse du point N+1 passe par la résolution du sous-système entouré d'un trait discontinu dans l'équation II.90. Le développement du sous-système aboutit à :

$$\begin{bmatrix} 2K_{\hat{a}} & -K_{\hat{a}} & & 0 \\ -K_{\hat{a}} & & & \\ & & & -K_{\hat{a}} \\ 0 & & -K_{\hat{a}} & 2K_{\hat{a}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_N \\ x_{N+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\lambda_{\hat{a}} & -\lambda_{\hat{a}} & & 0 \\ -\lambda_{\hat{a}} & & & \\ & & & -\lambda_{\hat{a}} \\ 0 & & -\lambda_{\hat{a}} & 2\lambda_{\hat{a}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \\ \dot{x}_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{\hat{a}} \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{\hat{a}} \end{Bmatrix} \dot{x}_2$$

Equ. II. 92

La solution particulière $\{X_1\}$ de l'équation II.92 est tout d'abord calculée :

$$\begin{bmatrix} 2K_{\hat{a}} & -K_{\hat{a}} & & 0 \\ -K_{\hat{a}} & & & \\ & & & -K_{\hat{a}} \\ 0 & & -K_{\hat{a}} & 2K_{\hat{a}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ \vdots \\ x_{1,N} \\ x_{1,N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{\hat{a}} \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{\hat{a}} \end{Bmatrix} \dot{x}_2 \quad \text{Equ. II. 93}$$

La première ligne donne : $x_{1,3} = x_{1,4}/2$,

et les lignes suivantes : $x_{1,i} = \frac{i-2}{i-1} x_{1,i+1}$.

L'avant-dernière ligne donne : $x_{1,N} = \frac{N-2}{N-1} x_{1,N+1}$,

et la dernière ligne : $\frac{N}{N-1} K_{\hat{a}} x_{1,N+1} = K_{\hat{a}} x_2 + \lambda_{\hat{a}} \dot{x}_2$

Par conséquent, nous avons la solution particulière :

$$x_{1,i} = \frac{i-2}{N} x_2 + \frac{\lambda_{\hat{a}}}{K_{\hat{a}}} \frac{i-2}{N} \dot{x}_2 \quad \text{Equ. II. 94}$$

Nous cherchons maintenant la solution $\{X_2\}$ de l'équation homogène sous la forme :

$$\{X_2\} = \{P\}e^{-\rho t} \quad \text{avec } \rho \geq 0 \quad \text{Equ. II. 95}$$

Nous obtenons un système de la forme :



$$\begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha & & 0 \\ & -\alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\alpha \\ 0 & & & -\alpha & 2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \alpha = K_{\hat{a}} - \rho\lambda_{\hat{a}} \quad \text{Equ. II. 96}$$

La structure de la matrice de l'équation II.96 est bien connue puisqu'on la retrouve souvent avec la technique des différences finis. Nous désirons $\{P\} \neq 0$, par conséquent le déterminant Δ_n de cette matrice (n, dimension de la matrice) doit être nul :

$$\Delta_n = (2n - 1)\alpha^n = 0$$

n est un entier, donc : $K_{\hat{a}} - \rho\lambda_{\hat{a}} = 0$

Nous avons donc n racines $\rho = K_{\hat{a}} / \lambda_{\hat{a}}$ avec $n=N-2$.

Le vecteur $\{P\}$ est déterminé d'après les conditions initiales $x_i = 0$ et $\dot{x}_i = 0$ pour $3 \leq i \leq N + 1$. Finalement :

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/N \\ 2/N \\ \vdots \\ N-1/N \end{Bmatrix} \left(1 - e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t} \right) \left(x_2 + \frac{\lambda_{\hat{a}}}{K_{\hat{a}}} \dot{x}_2 \right) \quad \text{Equ. II. 97}$$

et :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/N \\ 2/N \\ \vdots \\ N-1/N \end{Bmatrix} e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t} \left(\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}} x_2 + \dot{x}_2 \right) \quad \text{Equ. II. 98}$$

L'équation II.91 devient :

$$\begin{aligned} T_2 &= \left[1 - \frac{N-1}{N} \left(1 - e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t} \right) - \frac{N-1}{N} e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t} \right] K_{\hat{a}} x_2 + \\ &\quad \left[1 - \frac{N-1}{N} \left(1 - e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t} \right) - \frac{N-1}{N} e^{-\frac{K_{\hat{a}}}{\lambda_{\hat{a}}}t} \right] \lambda_{\hat{a}} \dot{x}_2 \\ &= \frac{K_{\hat{a}}}{N} x_2 + \frac{\lambda_{\hat{a}}}{N} \dot{x}_2 \end{aligned} \quad \text{Equ. II. 99}$$

La raideur équivalente est donc : $K^* = K_{\hat{a}} / N$,

et l'amortissement équivalent : $\lambda^* = \lambda_{\hat{a}} / N$.

Les brins des différentes parties de la courroie ayant été réduits, nous obtenons le système "pré-final" de la figure II.43. Le chapitre suivant traitera de la réduction du modèle "pré-final" en un modèle final.

II.3.5.3. Passage au modèle final

À ce niveau du calcul, les brins de courroie enroulée sur une poulie dentée ou sur un galet, et les brins libres ont été réduit en un seul couple ressort - amortisseur. Le système global de la transmission s'en trouve considérablement simplifié.

Le lien entre deux poulies contient 3 couples ressort - amortisseur (deux brins enroulés et un brin libre). Un lien entre une poulie et un galet ne comporte que deux couples, et un lien entre deux galets ne comporte qu'un couple ressort - amortisseur. L'objectif des trois prochains chapitres est de réduire à nouveau pour chaque cas (poulie et/ou galet) chaque lien pour n'avoir plus qu'un couple ressort - amortisseur global.

Pour calculer les raideurs et amortissements globaux tenant compte de l'ensemble des brins pour chaque lien, la méthode décrite dans les deux chapitres précédents est reprise pour $N = 3$ si on considère deux poulies i et $i+1$, $N = 2$ ou $N = 1$ si on a des galets.

II.3.5.3.1. Cas d'un lien entre deux poulies

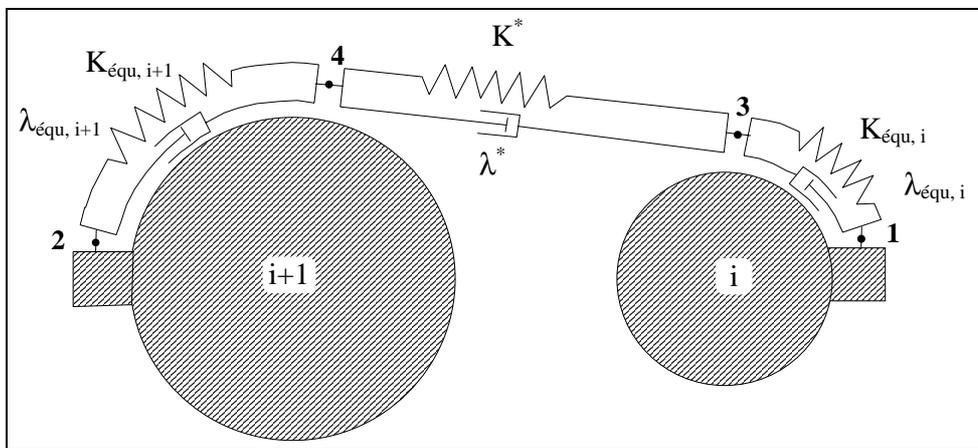


Figure II. 43 : Modèle "pré-final" pour deux poulies dentées.

Pour le cas d'un lien à deux poulies visualisé sur la figure II.43, on cherche un couple ressort - amortisseur ($K^{glob.}$ - $\lambda^{glob.}$) équivalent à la série de trois couples ressort - amortisseur représentant le brin libre (K^* - λ^*) et les brins enroulés ($K_{équ}$ - $\lambda_{équ}$) tel qu'ils sont représentés sur la figure II.44.

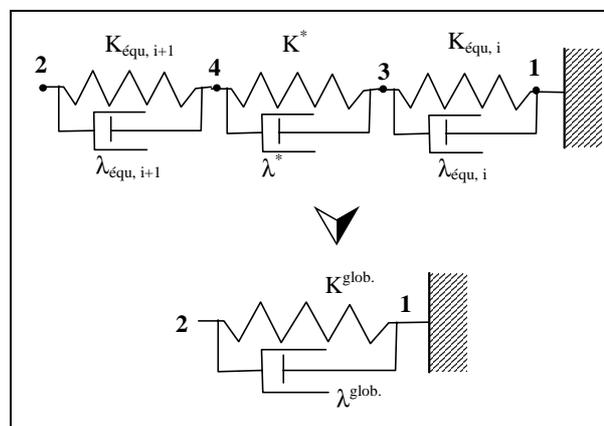


Figure II. 44 : Rigidité et amortissement global pour un lien entre deux poulies.



L'équilibre aux nœuds 1 à 4 de la figure II.44 s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{\acute{e}qu,i} & \lambda_{\acute{e}qu,i} & 0 & 0 & -K_{\acute{e}qu,i} & -\lambda_{\acute{e}qu,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{\acute{e}qu,i+1} & \lambda_{\acute{e}qu,i+1} & 0 & 0 & -K_{\acute{e}qu,i+1} & -\lambda_{\acute{e}qu,i+1} \\ -K_{\acute{e}qu,i} & -\lambda_{\acute{e}qu,i} & 0 & 0 & K_{\acute{e}qu,i} + K^* & \lambda_{\acute{e}qu,i} + \lambda^* & -K^* & -\lambda^* \\ 0 & 0 & -K_{\acute{e}qu,i+1} & -\lambda_{\acute{e}qu,i+1} & -K^* & -\lambda^* & K^* + K_{\acute{e}qu,i+1} & \lambda_{\acute{e}qu,i} + \lambda_{\acute{e}qu,i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \\ x_4 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equation II. 100

Selon la deuxième ligne de l'équation II.100, T_2 vérifie :

$$T_2 = K_{\acute{e}qu,i+1}(x_2 - x_4) + \lambda_{\acute{e}qu,i+1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_4) \quad \text{Equ. II. 101}$$

Il nous faut donc connaître le déplacement et la vitesse au nœud 4. Il est alors nécessaire de résoudre le sous-système des déplacements inconnus de l'équation II.100 :

$$\begin{bmatrix} K_{\acute{e}qu,i} + K^* & -K^* \\ -K^* & K^* + K_{\acute{e}qu,i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{\acute{e}qu,i} + \lambda^* & -\lambda^* \\ -\lambda^* & \lambda_{\acute{e}qu,i} + \lambda_{\acute{e}qu,i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ K_{\acute{e}qu,i+1} \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda_{\acute{e}qu,i+1} \end{Bmatrix} \dot{x}_2$$

Equation II. 102

La solution particulière ou statique de l'équation II.102 est :

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{K_{\acute{e}qu,i} K^* + K_{\acute{e}qu,i+1} K^* + K_{\acute{e}qu,i} K_{\acute{e}qu,i+1}} \left[\begin{Bmatrix} K_{\acute{e}qu,i+1} K^* \\ (K_{\acute{e}qu,i} + K^*) K_{\acute{e}qu,i+1} \end{Bmatrix} x_2 + \begin{Bmatrix} \lambda_{\acute{e}qu,i+1} K^* \\ (K_{\acute{e}qu,i} + K^*) \lambda_{\acute{e}qu,i+1} \end{Bmatrix} \dot{x}_2 \right]$$

Equation II. 103

Si nous calculons la partie transitoire de l'équation II.103, on s'aperçoit que le mouvement des nœuds 3 et 4 est différent si nous bloquons le nœud 1 ou inversement le nœud 2, du fait de la non symétrie des raideurs et amortisseurs. Cela engendre une raideur globale différente si la poulie i tourne alors que le poulie $i+1$ reste bloquée, et inversement (figure II.43). On obtient ainsi une matrice de raideur non symétrique. Or, les mesures sur banc de la matrice de raideur (chapitre III.3.1) montrent que celle-ci est symétrique. Par conséquent, seule la partie particulière de l'équation II.102 sera considérée puisqu'elle rend symétrique la raideur globale (équation II.104). L'équation II.103 avec l'équation II.101 (et $\dot{x}_4 = 0$) permet d'obtenir la raideur et l'amortissement global du modèle final (figure II.45) :

$$T_2 = \underbrace{\frac{K^* K_{\acute{e}qu,i} K_{\acute{e}qu,i+1}}{K^* (K_{\acute{e}qu,i} + K_{\acute{e}qu,i+1}) + K_{\acute{e}qu,i} K_{\acute{e}qu,i+1}}}_{\text{raideur globale } K^{\text{glob.}}} x_2 + \underbrace{\frac{K^* K_{\acute{e}qu,i} \lambda_{\acute{e}qu,i+1}}{K^* (K_{\acute{e}qu,i} + K_{\acute{e}qu,i+1}) + K_{\acute{e}qu,i} K_{\acute{e}qu,i+1}}}_{\text{amortissement global } \lambda^{\text{glob.}}} \dot{x}_2$$

Equation II. 104

Nous vérifions sur l'équation II.104 que la raideur globale ne change pas si les raideurs $K_{\text{éq}, i}$ et $K_{\text{éq}, i+1}$ sont permutées.

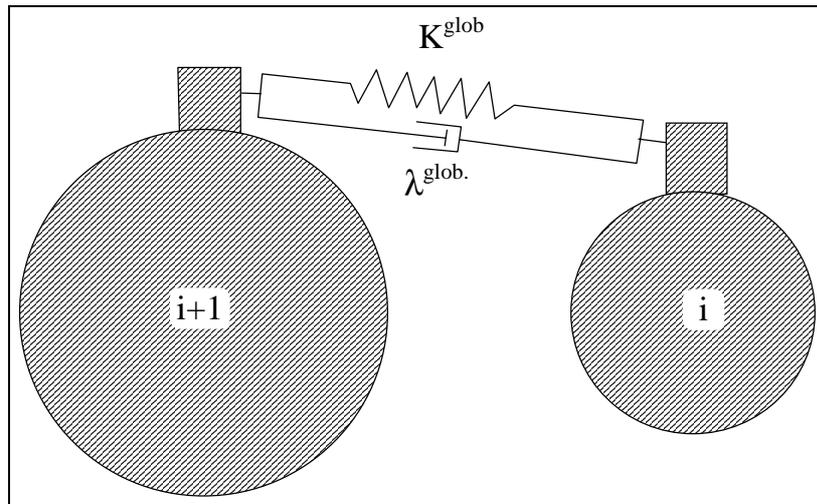


Figure II. 45 : Modèle final.

II.3.5.3.2. Cas d'un lien entre une poulie et un galet

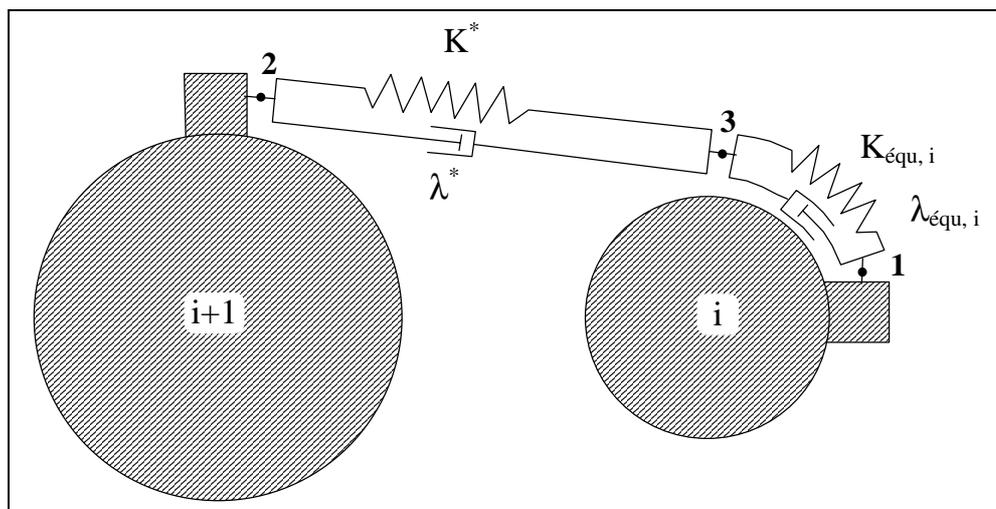


Figure II. 46 : Modèle "pré-final" pour une poulie dentée i et un galet $i+1$.

Pour le cas d'un lien entre une poulie dentée et un galet (figure II.46), on cherche un couple ressort - amortisseur ($K^{\text{glob.}}-\lambda^{\text{glob.}}$) équivalent à la série de deux couples ressort-amortisseur représentant d'une part le brin libre et le brin enroulé sur la galet ($K^*-\lambda^*$) et d'autre part, le brin enroulé sur la poulie dentée ($K_{\text{éq}, i}-\lambda_{\text{éq}, i}$), tel qu'ils sont représentés sur la figure II.47.

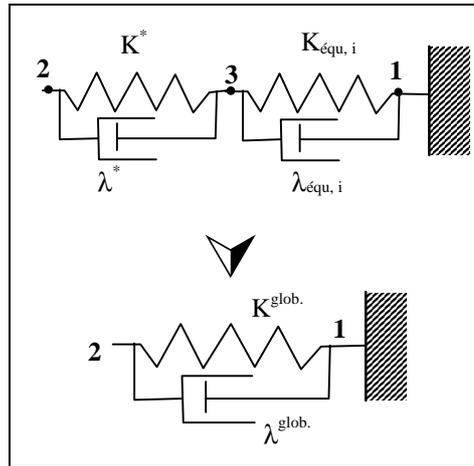


Figure II. 47 : Rigidité et amortissement global pour un lien entre une poulie dentée et un galet.

L'équilibre aux nœuds 1 à 3 de la figure II.47 s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{\text{éq},i} & \lambda_{\text{éq},i} & 0 & 0 & -K_{\text{éq},i} & -\lambda_{\text{éq},i} \\ 0 & 0 & K^* & \lambda^* & -K^* & -\lambda^* \\ -K_{\text{éq},i} & -\lambda_{\text{éq},i} & -K^* & -\lambda^* & K_{\text{éq},i} + K^* & \lambda_{\text{éq},i} + \lambda^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equation II. 105

Selon la deuxième ligne de l'équation II.105, T_2 vérifie :

$$T_2 = K^*(x_2 - x_3) - \lambda^*(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \tag{Equ. II. 106}$$

Il faut donc connaître le déplacement et la vitesse au nœud 3. Il est alors nécessaire de résoudre l'équation du déplacement du nœud 3 :

$$(K_{\text{éq},i} + K^*)x_3 + (\lambda_{\text{éq},i} + \lambda^*)\dot{x}_3 = K^*x_2 + \lambda^*\dot{x}_2 \tag{Equ. II. 107}$$

La solution particulière ou statique de l'équation II.107 est :

$$x_3 = \frac{K^*}{K_{\text{éq},i} + K^*}x_2 + \frac{\lambda^*}{K_{\text{éq},i} + K^*}\dot{x}_2 \tag{Equ. II. 108}$$

Pour les mêmes raisons énoncées au chapitre II.II.3.5.3.1, la partie transitoire de l'équation II.108 n'est pas calculée car on se place à l'asymptote. L'équation II.108 avec l'équation II.106 (et $\dot{x}_3 = 0$) permet d'obtenir la raideur et l'amortissement global du modèle final (figure II.45) :

$$T_2 = \underbrace{\frac{K^*K_{\text{éq},i}}{K^* + K_{\text{éq},i}}}_{\text{raideur globale } K^{\text{glob.}}} x_2 + \underbrace{\lambda^* \left(1 - \frac{\lambda^*}{K^* + K_{\text{éq},i}} \right)}_{\text{amortissement global } \lambda^{\text{glob.}}} \dot{x}_2 \tag{Equ. II. 109}$$

Nous retrouvons avec la raideur globale le résultat classique de deux ressorts en série.

II.3.5.3.3. Cas d'un lien entre deux galets

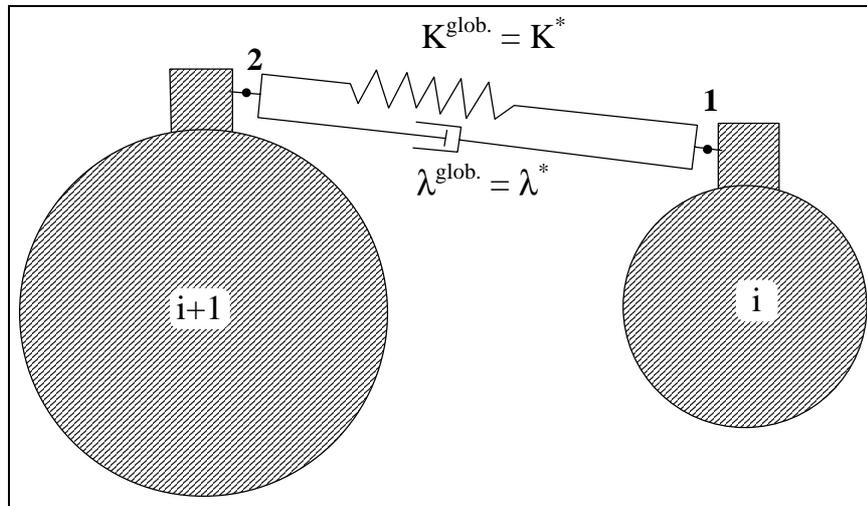


Figure II. 48 : Modèle "pré-final" et final pour deux galets.

Le cas de deux galets consécutifs est traité bien qu'improbable. Le lien entre deux galets ne comprend qu'un couple ressort - amortisseur. On trouve donc immédiatement la raideur et l'amortissement global (figure II.48).

II.3.6. 5^{ème} module : Résolution des équations du mouvement

II.3.6.1. Établissement des équations du mouvement

Nous considérons d'abord la transmission comme un système constitué de solides indéformables et de liaisons parfaites (puissance virtuelle nulle pour un mouvement virtuel rigidifiant figé). Les efforts extérieurs appliqués au système sont introduits par leur torseur d'effort s'appliquant sur les paliers. Les liaisons internes (paliers et courroie) sont modélisées par des ressorts. Les efforts, internes et externes, Q_i dérivent donc d'un potentiel E_p ($Q_i = -\frac{\partial E_p(q,t)}{\partial q_i}$). Nous pouvons donc appliquer le formalisme lagrangien. Celui-ci consiste à additionner l'énergie cinétique E_c et potentielle E_p pour chaque élément du système formant ainsi le lagrangien :

$$L(q, \dot{q}, t) = E_c(q, \dot{q}, t) - E_p(q, t) \quad \text{avec } q, \text{ coordonnées généralisées du système.}$$

Les équations de Lagrange qui, avec l'aide des conditions initiales, déterminent le mouvement $q(t)$ du système, s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$



Les chapitres suivants déterminent les équations de Lagrange pour chaque élément du système, en conformité avec les hypothèses de travail. L'équation différentielle régissant le mouvement du système ainsi obtenue est conservative. Toutefois, dans tout mouvement réel, la puissance réelle des efforts de liaison est négative. On ajoute donc au système, des forces de frottement R_i de type visqueux dépendant d'un pseudo-potential des dissipations ($R_i = -\frac{\partial E_p(q,t)}{\partial \dot{q}_i}$). On obtient ainsi une équation du mouvement de la forme :

$$\underbrace{[M]}_{\text{matrice d'inertie}} \{ \dot{q} \} + \underbrace{[C]}_{\text{matrice d'amortissement}} \{ \dot{q} \} + \underbrace{[K]}_{\text{matrice de raideur}} \{ q \} = \underbrace{\{ F \}}_{\text{vecteur des efforts appliqués}}$$

Il faut maintenant définir les coordonnées généralisées du système q_i .

II.3.6.2. Définition des variables du système

Initialement, les centres des poulies sont à la position (x_i, y_i) . Leurs déplacements dans le plan sont (u_i, v_i) . Le déplacement total d'une poulie dans le plan est donc (x_i+u_i, y_i+v_i) . La poulie est également repérée par son angle θ_i . Celui-ci comporte deux parties $\theta_{i,s}$ et $\theta_{i,v}$.

1. $\theta_{i,s}$ est l'angle de rotation quasi-statique (appelé parfois normalisé) dû à la rotation d'une transmission géométriquement parfaite. Cet angle se calcule à partir de la vitesse de rotation moyenne $\dot{\theta}_{i,s}$ de la poulie motrice (toujours numérotée 1) : $\theta_{i,s} = \frac{R_1}{R_i} (\dot{\theta}_1 t)$.

2. $\theta_{i,v}$ est l'angle "variable" du système qui une inconnue de l'équation du mouvement. Cet angle est la conséquence en dynamique de l'élasticité du système en rotation. Il comprend l'acyclisme cinématique $\theta_{i,c}$ dû aux imperfections des poulies (excentricité) et de la courroie (non homogénéité de la courroie); et l'acyclisme dynamique $\theta_{i,d}$. On a donc $\theta_{i,v} = \theta_{i,c} + \theta_{i,d}$. Pour le vilebrequin, $\theta_{i,v}$ correspond à l'acyclisme moteur.

Le déplacement angulaire total d'une poulie est donc $(\theta_{i,s}+\theta_{i,v})$. On a alors trois coordonnées généralisées $(u_i, v_i, \theta_{i,v})$ pour chaque poulie. L'acyclisme moteur est imposée. L'angle "variable" $\theta_{i,v}$ est une donnée d'entrée et n'est donc pas une variable. Ainsi, pour un système à n poulies, nous avons 3n-1 variables. Le système comporte une liaison supplémentaire si un tendeur dynamique fait partie de la transmission. Celui-ci impose une trajectoire circulaire au galet supporté par le tendeur. Dans ce cas, on peut restreindre le paramétrage d'une variable : le système n'a plus que 3n-2 degrés de liberté.

II.3.6.3. Energie cinétique d'une poulie

La poulie restant dans le même plan (figure II.49), le torseur cinétique \mathcal{S}_{C_i/R_0} dans le repère fixe $R_{0|xyz}$, au centre de la poulie C_i , est :

$$\mathcal{S}_{C_i/R_0} \left\{ \begin{array}{l} \text{quantité de mouvement} = \underbrace{M_i}_{\text{masse}} \dot{u}_i \vec{x} + M_i \dot{v}_i \vec{y} \\ \text{moment cinétique} = \underbrace{I_i}_{\text{moment d'inertie}} \dot{\theta}_i \vec{z} \end{array} \right.$$

On obtient l'énergie cinétique pour la poulie i :

$$E_c^i = \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} M_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2)$$

On pose $\theta_i = \theta_{i,s} + \theta_{i,v}$:

$$E_c^i = \frac{1}{2} I_i (\dot{\theta}_{i,s} + \dot{\theta}_{i,v})^2 + \frac{1}{2} M_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2)$$

L'application du théorème de Lagrange donne les actions d'inertie de la poulie i. La partie associée à $\theta_{i,s}$ sera mise dans le second membre car $\theta_{i,s}$ est l'angle de rotation imposée au système :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c^i}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial E_c^i}{\partial \theta_i} = I_i \ddot{\theta}_{i,s} + I_i \ddot{\theta}_{i,v} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c^i}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial E_c^i}{\partial u_i} = M_i \ddot{u}_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c^i}{\partial \dot{v}_i} \right) - \frac{\partial E_c^i}{\partial v_i} = M_i \ddot{v}_i \end{cases} \quad \text{Equ. II. 110}$$

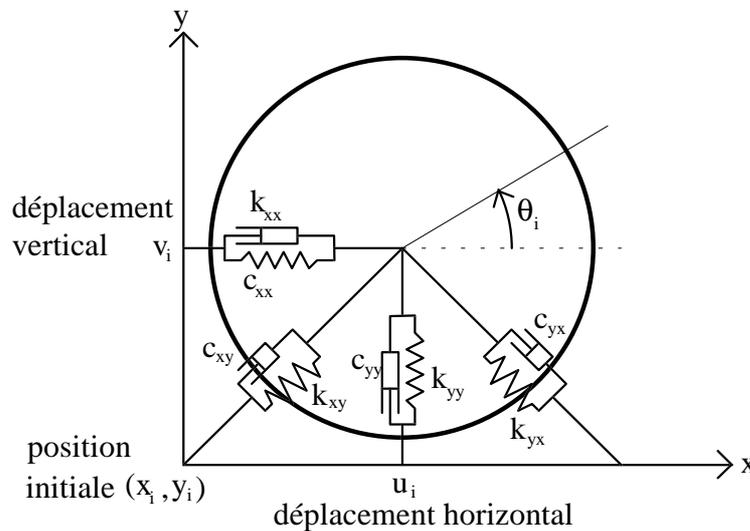


Figure II. 49 :Repérage d'une poulie i et caractéristiques mécaniques de sa liaison pivot.

On remarque pour les équations II.110 l'absence de couplage inertiel entre u , v et θ , comme c'est le cas dans l'article de S. J. Hwang (chapitre I.2.1.4) pour le galet tendeur (équation I.24 et I.25). On peut rapidement retrouver les forces d'inertie calculées par S. J. Hwang en déterminant l'énergie cinétique du galet tendeur rattachée au bras du tendeur de longueur l_t en rotation d'un angle θ_t autour d'un point fixe (figure I.8). L'énergie cinétique de la poulie dans le référentiel associé à son centre de masse (référentiel en translation par rapport au référentiel



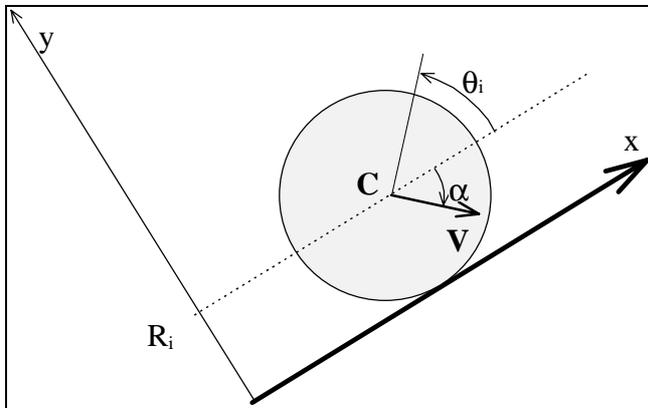
galiléen du laboratoire et d'origine le centre de masse) est $I_i(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_t)^2 / 2$. On ajoute l'énergie de translation du centre de masse à l'énergie de rotation (théorème de Kœnig) pour obtenir l'énergie cinétique du galet. L'énergie du bras du tendeur ne dépend que de l'angle θ_t :

$$E_{\text{galet+tendeur}} = \frac{I_i}{2} (\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_t)^2 + \frac{M_i}{2} (l_t \dot{\theta}_t)^2 + E_{\text{tendeur}}(\dot{\theta}_t)$$

Nous retrouvons l'équation de Lagrange concernant θ_i identique à l'équation I.25 :

$$I_i(\ddot{\theta}_i - \ddot{\theta}_t) = \sum \text{moment des efforts ext. au syst. tendeur + galet} \quad \text{id. Équ. I.25}$$

L'équation précédente présente un couplage inertiel entre la rotation θ_i et le déplacement du galet lié à θ_t . Cependant, il faut aussi prendre en compte la condition de contact sans glissement entre le galet et la courroie.



Pour simplifier, nous considérons un contact ponctuel entre un galet et un axe x symbolisant la courroie (figure II.50). La condition de non-glissement est une vitesse nulle selon x du point du galet en contact à l'instant considéré avec l'axe x, c'est-à-dire :

$$V \cos \alpha + R_i \dot{\theta}_i = 0 \quad \text{Equ. II. 111}$$

V est la vitesse du centre C du galet. Dans le cas du tendeur : $V = l_t \dot{\theta}_t$ (d'après la nomenclature de la figure I.15).

Figure II. 50 : Galet en contact ponctuel avec un axe.

En intégrant l'équation II.111, nous

obtenons à une constante près :

$$\theta_i = -\frac{l_t}{R_i} \theta_t \cos \alpha \quad \text{Equ. II. 112}$$

L'énergie cinétique devient alors :

$$\frac{1}{2} I_i (\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_t)^2 = \frac{1}{2} I_i \left\{ -\dot{\theta}_t \left(1 + \frac{l_t}{R_i} \cos \alpha \right) \right\}^2 \quad \text{Equ. II. 113}$$

Pour le cas invraisemblable (tendeur instable) où $\alpha = 0$ (courroie en position a sur la figure II.51), nous avons alors un couplage maximum entre la rotation du tendeur et la rotation du galet. En revanche, pour le cas plus efficace où $\alpha = 90^\circ$ (courroie en position b sur la figure II.51), l'énergie cinétique devient $I_i \dot{\theta}_t^2 / 2$. Il n'y a plus de couplage inertiel dans ce second cas entre la rotation du galet et le déplacement de son centre lié à θ_t . Pour le galet tendeur, on peut finalement estimer, comme Y. L. Yang (chapitre I.2.1.3), qu'il n'y a pas de couplage inertiel entre le déplacement du centre du galet et son déplacement angulaire θ_t car la configuration d'un tendeur efficace sera toujours plus proche du cas b que du cas a. Qu'en est-il des autres galets et poulies ?

Les deux cas de la figure II.51 représentent des contacts galet-courroie ponctuels. Or dans une transmission par courroie crantée, il est nécessaire d'avoir un arc d'enroulement autour des poulies suffisamment important pour avoir un nombre de dents de courroie en prise satisfaisant. Si l'arc d'enroulement est π radians, nous comprenons que la poulie ne tourne pas si son centre se déplace suivant u ou v . Étant donné la difficulté d'exprimer la loi $\theta_i(u, v)$ pour avoir l'énergie de rotation $I_i(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_i^*)^2/2$ de la poulie ou du galet, on admet que les arcs d'enroulement sont suffisamment importants pour que la rotation θ^* induite par u et v soit négligée. À l'instar de tous les auteurs de modélisation de transmission en rotation, excepté S. J. Hwang, nous négligeons donc le couplage inertiel entre la rotation propre θ_i du galet ou de la poulie, et du déplacement de son centre.

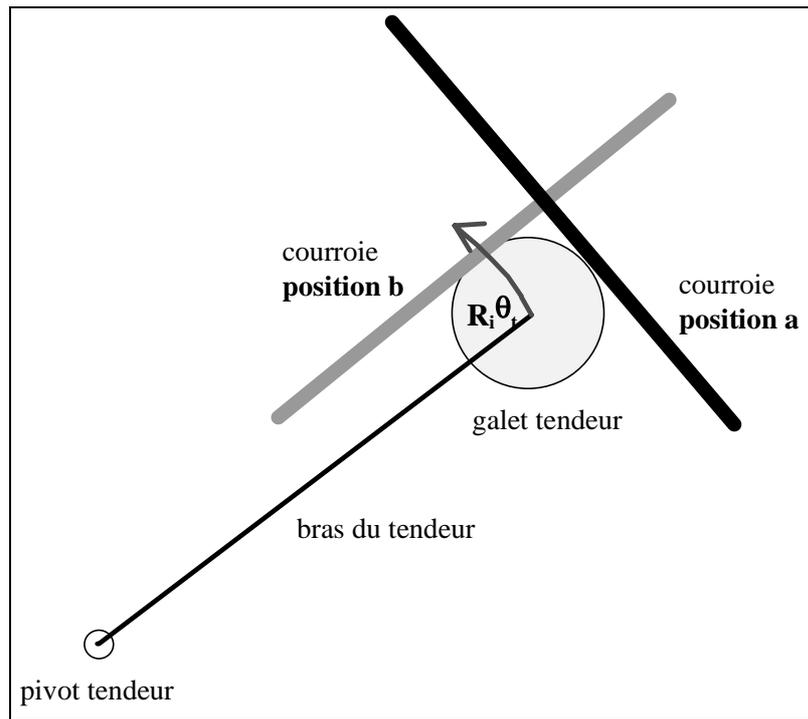


Figure II. 51 : Schéma cinématique du galet tendeur en fonction de la position de la courroie.

II.3.6.4. Torseur d'effort au centre de rotation de chaque palier

II.3.6.4.1. Efforts extérieurs au système

Le torseur des efforts extérieurs se réduit au centre de rotation du palier ou de la poulie sous forme de série de Fourier :

$$\mathcal{S}|_{\text{effort}/R_0} \left\{ \begin{array}{l} \text{résultante des forces} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta_i} + a(b - e^{-ct})}_{F_u} \vec{x} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n e^{in\theta_i} + a'(b' - e^{-c't})}_{F_v} \vec{y} \\ \text{moment des forces} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (d_n e^{in\theta_i} + \eta C_f) \vec{z} \end{array} \right.$$

Equ. II. 114



La partie de la résultante des forces en e^{-t} permet de simuler une force due à la dilatation thermique du carter sur le palier. L'accroissement des entr'axes résultant de la dilatation thermique permet de compenser, dans une mesure restant à déterminer, la baisse de la tension due à l'effet centrifuge. Le rôle du tendeur dynamique reste aussi à déterminer. Une force périodique peut être également appliquée sur les paliers.

Le couple appliqué aux poulies est développé en série de Fourier. À ce couple s'ajoute pour les galets un couple de frottement C_f provenant du frottement du joint d'étanchéité du roulement. Le paramètre η égal à ± 1 dépend du sens de rotation du galet.

II.3.6.4.2. Efforts simulant l'erreur de transmission cinématique

L'erreur de transmission cinématique θ_{ic} pour la poulie i , causée par les imperfections de la courroie (figure II.2), l'excentricité des poulies (figure II.8) et par l'effet polygonal (figure II.13), est décomposée en série de Fourier à partir d'une mesure expérimentale. Pour ajouter cette erreur cinématique à l'angle de calcul θ_{iv} , nous calculons un couple équivalent $C_{err. cin.}$ d'après l'équation régissant le mouvement du système $\xi(u_i, v_i, \theta_{iv})$:

$$\underbrace{[M]}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{de masse}}} \left\{ \ddot{\xi}(u_i, v_i, \theta_{iv}) \right\} + \underbrace{[\lambda]}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{d'amortissement}}} \left\{ \dot{\xi}(u_i, v_i, \theta_{iv}) \right\} + \underbrace{[K]}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{de raideur}}} \left\{ \xi(u_i, v_i, \theta_{iv}) \right\} = \{C\} \quad \text{id. Equ. II.155}$$

Le couple équivalent à l'erreur cinématique est par conséquent :

$$[M]\left\{\ddot{\xi}(0,0,\theta_{ic})\right\} + [\lambda]\left\{\dot{\xi}(0,0,\theta_{ic})\right\} + [K]\left\{\xi(0,0,\theta_{ic})\right\} = \left\{C_{err. cin.}\right\} \quad \text{Equ. II. 115}$$

En ajoutant au second membre des équations du mouvement, nous retrouvons donc pour des régimes de rotation quasi-statique, l'erreur de transmission cinématique. Nous remarquons que le déplacement aux paliers en régime quasi-statique est pris pour nul à défaut. En effet, cela nécessiterait de mesurer aussi les lois u_{ic} et v_{ic} ce que personne n'a fait jusqu'à présent.

II.3.6.4.3. Efforts dus aux variations globales de tension

Des variations globales de tension sur toute la courroie ont deux origines : (1) la tension centrifuge $T_c = mc^2$ (annexe IV) et (2) la surtension T_{exc} causée par l'excentricité des poulies (figure II.9). On nomme la variation de tension totale : $\Delta T = T_c + T_{exc}$. La résultante sur la poulie i de la figure II.18 est :

$$\begin{cases} F_u = \Delta T(\sin \varphi_{a,i} - \sin \varphi_{b,i}) \\ F_v = \Delta T(\cos \varphi_{b,i} - \cos \varphi_{a,i}) \end{cases}$$

II.3.6.5. Travaux virtuels dus aux paliers

Le travail virtuel dû à un palier se décompose comme suit (figure II.49) :

$$\begin{aligned} \partial W = & -k_{xx} u_i \partial u_i - k_{yx} u_i \partial v_i - k_{yy} v_i \partial v_i - k_{xy} v_i \partial u_i \\ & - c_{xx} \dot{u}_i \partial u_i - c_{yx} \dot{u}_i \partial v_i - c_{yy} \dot{v}_i \partial v_i - c_{xy} \dot{v}_i \partial u_i \end{aligned}$$

D'où la force généralisée :

$$\begin{Bmatrix} F_{u_i} \\ F_{v_i} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \end{Bmatrix} \quad \text{Equ. II. 116}$$

II.3.6.6. Travaux virtuels dus aux brins "globaux"

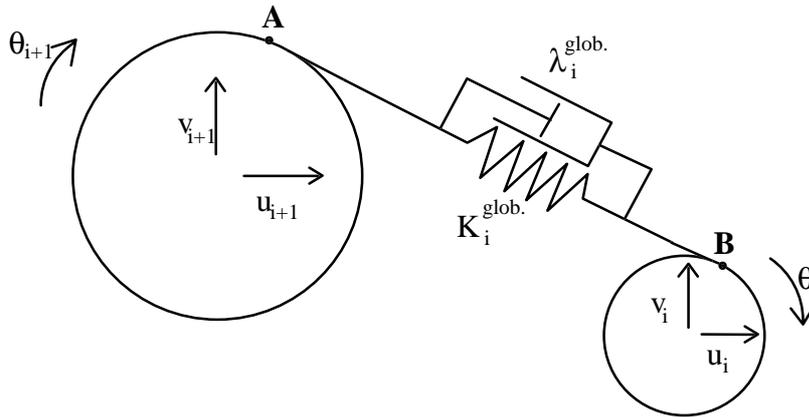


Figure II. 52 : Schéma du brin libre "global".

Le travail virtuel d'un brin "global" (défini au chapitre II.II.3.5.3) est :

$$\begin{aligned} \partial W = & \underbrace{F_A \vec{b}_i * R_{i+1} \partial \theta_{i+1,v} (-\vec{b}_i) + F_B \vec{b}_i * R_i \partial \theta_{i,v} (-\vec{b}_i)}_{\text{travail dû à la rotation des poulies}} \\ & + \underbrace{F_B * \partial u_i \vec{b}_i \cdot \vec{x} + F_B * \partial v_i \vec{b}_i \cdot \vec{y} + F_A * \partial u_{i+1} \vec{b}_i \cdot \vec{x} + F_A * \partial v_{i+1} \vec{b}_i \cdot \vec{y}}_{\text{travail dû à la translation des poulies}} \end{aligned} \quad \text{Equ. II. 117}$$

avec \vec{b}_i vecteur brin normalisé (figure II.18),
 F_A et F_B force exercée par le brin sur les points A et B.

Nous avons d'après le principe de la réaction : $F_A = -F_B$.

D'autre part, la force exercée par le ressort sur le point A est :

$$F_A \vec{b}_i = -K_i^{glob.} \left(+ R_i \theta_{i,v} - R_{i+1} \theta_{i+1,v} + dl_i(u_i) + dl_i(u_{i+1}) + dl_i(v_i) + dl_i(v_{i+1}) \right) \vec{b}_i$$

avec $dl_i(u_i)$ variation de la longueur du brin l_i avec le déplacement u_i .

Comme u et v sont très petit vis à vis de la longueur des brins, nous pouvons calculer l'allongement dl_i au premier ordre du brin i , lorsqu'une des deux poulies se déplace. D'après la formulation de la longueur d'un brin l_i énoncée sur la figure II.17, nous obtenons :

$$\left| dl_i(u_{i+1}) = - \frac{-x_{i+1} + x_i}{l_i} u_{i+1} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} dl_i(u_i) = + \frac{-x_{i+1} + x_i}{l_i} u_i \\ dl_i(v_{i+1}) = - \frac{-y_{i+1} + y_i}{l_i} v_{i+1} \\ dl_i(v_i) = + \frac{-y_{i+1} + y_i}{l_i} v_i \end{array} \right.$$

Ces quatre équations sont aussi valables si le brin se croise entre les deux poulies.

Connaissant les allongements dl_i , nous pouvons maintenant définir le travail virtuel fourni par le ressort et l'amortisseur en fonction des déplacements virtuels rigidifiants du système :

$$\begin{aligned} \partial W = & -K_i^{glob.} \left[-R_{i+1} \theta_{i+1,v} + R_i \theta_{iv} - \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{l_i} \right) u_{i+1} + \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{l_i} \right) u_i - \left(\frac{y_i - y_{i+1}}{l_i} \right) v_{i+1} + \left(\frac{y_i - y_{i+1}}{l_i} \right) v_i \right] \\ & \cdot \partial \left[-R_{i+1} \theta_{i+1,v} + R_i \theta_{iv} + b_{i,x} u_{i+1} - b_{i,x} u_i + b_{i,y} v_{i+1} - b_{i,y} v_i \right] \\ & - \lambda_i^{glob.} \left[-R_{i+1} \dot{\theta}_{i+1,v} + R_i \dot{\theta}_{iv} - \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{l_i} \right) \dot{u}_{i+1} + \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{l_i} \right) \dot{u}_i - \left(\frac{y_i - y_{i+1}}{l_i} \right) \dot{v}_{i+1} + \left(\frac{y_i - y_{i+1}}{l_i} \right) \dot{v}_i \right] \\ & \cdot \partial \left[-R_{i+1} \theta_{i+1,v} + R_i \theta_{iv} + b_{i,x} u_{i+1} - b_{i,x} u_i + b_{i,y} v_{i+1} - b_{i,y} v_i \right] \end{aligned}$$

avec $b_{i,x} = \vec{b}_i \cdot \vec{x}$ et $b_{i,y} = \vec{b}_i \cdot \vec{y}$

Nous obtenons ainsi les forces généralisées pour le brin i :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{u_i} \\ F_{v_i} \\ F_{\theta_i} \\ F_{u_{i+1}} \\ F_{v_{i+1}} \\ F_{\theta_{i+1}} \end{array} \right\} = [C] \left(\begin{array}{l} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_{i+1} \\ v_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{array} \right) - \lambda_i^{glob.} \left(\begin{array}{l} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{u}_{i+1} \\ \dot{v}_{i+1} \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{array} \right) \quad \text{Equ. II. 118}$$

$$\text{avec } [C] = \begin{bmatrix} -b_{i,x} \underline{x}_i & -b_{i,x} \underline{y}_i & -b_{i,x} R_i & +b_{i,x} \underline{x}_i & +b_{i,x} \underline{y}_i & +b_{i,x} R_{i+1} \\ -b_{i,y} \underline{x}_i & -b_{i,y} \underline{y}_i & -b_{i,y} R_i & +b_{i,y} \underline{x}_i & +b_{i,y} \underline{y}_i & +b_{i,y} R_{i+1} \\ R_i \underline{x}_i & R_i \underline{y}_i & R_i^2 & -R_i \underline{x}_i & -R_i \underline{y}_i & -R_i R_{i+1} \\ +b_{i,x} \underline{x}_i & +b_{i,x} \underline{y}_i & +b_{i,x} R_i & -b_{i,x} \underline{x}_i & -b_{i,x} \underline{y}_i & -b_{i,x} R_{i+1} \\ +b_{i,y} \underline{x}_i & +b_{i,y} \underline{y}_i & +b_{i,y} R_i & -b_{i,y} \underline{x}_i & -b_{i,y} \underline{y}_i & -b_{i,y} R_{i+1} \\ -R_{i+1} \underline{x}_i & -R_{i+1} \underline{y}_i & -R_{i+1}^2 & +R_{i+1} \underline{x}_i & +R_{i+1} \underline{y}_i & +R_{i+1} R_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{l_i} \right) \quad \text{et} \quad \underline{y} = \left(\frac{y_i - y_{i+1}}{l_i} \right)$$

II.3.6.7. Travail virtuel du tendeur

Conformément aux hypothèses (chapitre II.II.2.3), le modèle (figure II.53) s'appuie sur un

tendeur de mouvement circulaire autour d'un pivot fixe de coordonnées (x_t, y_t) .

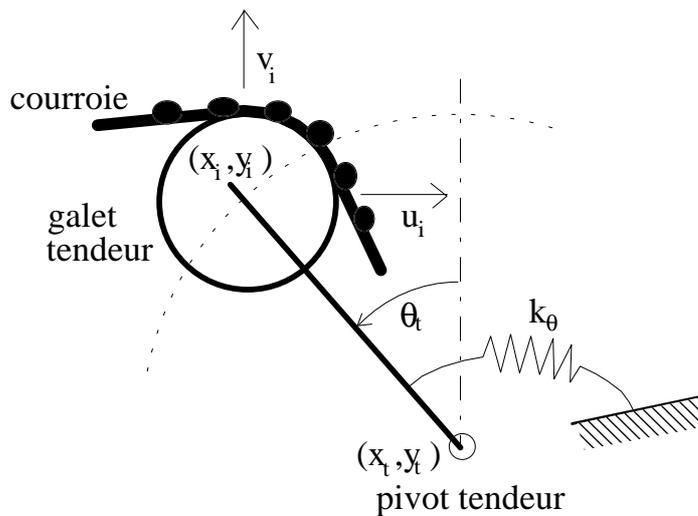


Figure II. 53 : Schéma du tendeur.

Le couple de rappel de ce tendeur est :

$$C_{torsion} = -k_{\theta}(\theta_t - \theta_{t,0}) - \lambda_{\theta} \dot{\theta}_t \tag{Equ. II. 119}$$

- avec k_{θ} raideur de torsion équivalente du tendeur,
- λ_{θ} amortissement de torsion équivalent du tendeur,
- $\theta_{t,0}$ angle de référence où le couple est nul (en statique).

En général, l'amortissement est non linéaire. Le tendeur est très amorti lorsqu'il s'écarte de la courroie. Inversement, le tendeur est peu amorti lorsqu'il s'approche de la courroie. Cette condition est incluse dans le modèle en tenant compte du sens de rotation (signe de $\dot{\theta}_t$).

En statique, le couple de torsion du tendeur peut s'écrire :

$$C_{torsion} = -k_{\theta}(\theta_t - \theta_{t,i} + \theta_{t,i} - \theta_{t,0}) \tag{Equ. II. 120}$$

avec $\theta_{t,i}$, angle initial repérant le tendeur.

À l'instant initial, nous avons un équilibre statique entre l'action de la courroie et celle du tendeur (figure II.54) :

$$\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{T_{0/M_1}} + 0\overrightarrow{M_2} \wedge \overrightarrow{T_{0/M_2}} - k_{\theta}(\theta_{t,i} - \theta_{t,0}) = 0 \tag{Equ. II. 121}$$

Nous pouvons ainsi simplifier l'équation II.119 en ne gardant que la partie du couple qui travaille :

$$C_{torsion} = -k_{\theta}(\theta_t - \theta_{t,i}) - \lambda_{\theta} \dot{\theta}_t \tag{Equ. II. 122}$$

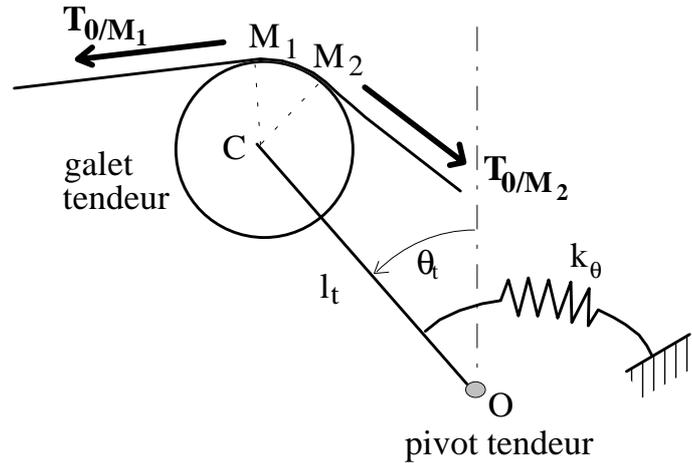


Figure II. 54 : Équilibre du tendeur.

Les degrés de liberté du système concernant le galet (θ_i, u_i, v_i) sont rattachés à l'angle de rotation θ_t du tendeur. Cet angle s'écrit :

$$\theta_t = a \tan\left(\frac{x_i + u_i - x_t}{y_t - y_i - v_i}\right) = a \tan\left(\frac{X}{Y}\right) \quad \text{Equ. II. 123}$$

avec (x_i, y_i) position initiale du galet tendeur,
 (u_i, v_i) déplacements du galet tendeur,
 (x_t, y_t) position du pivot du tendeur.

$$\text{on pose : } \begin{cases} X = x_i + u_i - x_t \\ Y = y_t - y_i - v_i \end{cases} \quad \text{Equ. II. 124}$$

On a donc $\theta_t = 0$ lorsque le tendeur est situé à la verticale (modulo- π). Le sens positif de rotation est le sens trigonométrique (figure II.54).

La rotation du tendeur impose une contrainte géométrique :

$$X^2 + Y^2 = l_t^2 \quad \text{avec } l_t \text{ longueur de la tige du tendeur} \quad \text{Equ. II. 125}$$

En pratique, le déplacement circulaire du galet tendeur est toujours faible en regard de son rayon. Nous pouvons donc linéariser le mouvement autour de sa position d'équilibre statique initiale. La formule de Taylor est appliquée au premier ordre à l'équation II.123 :

$$a \tan\left(\frac{x_i + u_i - x_t}{y_t - y_i - v_i}\right) \approx a \tan\left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} u_i + \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} \frac{x_i - x_t}{(y_t - y_i)^2} v_i$$

$$\theta_t - \theta_{t,i} \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} u_i + \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} \frac{x_i - x_t}{(y_t - y_i)^2} v_i \quad \text{Equ. II. 126}$$

L'angle initial du tendeur étant : $\theta_{t,i} = \arctan\left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)$

Nous choisissons d'utiliser un paramétrage restreint dû à la trajectoire imposée du galet tendeur. Des équations II.124 et II.125, nous tirons :

$$v_i = -Y + y_t - y_i \quad \text{Equ. II. 127}$$

On obtient également :

$$\partial v_i = \frac{X}{Y} \partial u_i \quad \text{et} \quad \dot{v}_i = \frac{X}{Y} \dot{u}_i \quad \text{Equ. II. 128}$$

L'équation II.126 devient :

$$\theta_t - \theta_{t,i} = \frac{1 + \frac{x_i - x_t}{(y_t - y_i)^2} \frac{X}{Y}}{1 + \left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2} u_i = T \cdot u_i \quad \text{Equ. II. 129}$$

Pour simplifier, nous posons : $T = \frac{1 + \frac{x_i - x_t}{(y_t - y_i)^2} \frac{X}{Y}}{1 + \left(\frac{x_i - x_t}{y_t - y_i}\right)^2}$

On obtient de l'équation II.123 :

$$\partial \theta_t = \frac{1}{Y} \partial u_i \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_t = \frac{1}{Y} \dot{u}_i \quad \text{Equ. II. 130}$$

ou de l'équation II.129 : $\partial \theta_t = T \partial u_i$ Equ. II. 131

On peut maintenant définir le travail virtuel fourni par le tendeur à partir des équations II.122 et II.129 :

$$\begin{aligned} \partial W &= -k_\theta T u_i \partial \theta_t - \lambda_\theta \frac{\dot{u}_i}{Y} \partial \theta_t \\ &= -\left(k_\theta T^2 u_i + \frac{\lambda_\theta}{Y^2} \dot{u}_i\right) \partial u_i \end{aligned} \quad \text{Equ. II. 132}$$

L'équation II.131 est utilisée pour le travail du ressort de torsion et l'équation II.130 pour l'amortisseur, afin d'avoir systématiquement un terme de raideur et d'amortissement au carré.

II.3.6.8. Réduction du système dans le cas de l'utilisation d'un tendeur



L'utilisation d'un paramétrage restreint est requise si la transmission utilise un tendeur. Le déplacement vertical du galet v_i est supprimé de l'équation du mouvement ce qui réduit le nombre de degré de liberté du système. Pour cela, il faut exprimer v_i et ses dérivées en fonction des autres variables du système.

À partir de l'équation II.125, nous obtenons :

$$v_i = y_t - y_i - \frac{l_t^2 - (x_i - x_t) \cdot X}{Y} + \frac{X}{Y} u_i = \alpha \cdot u_i + \delta \quad \text{Equ. II. 133}$$

$$\text{avec } \alpha = X^{n-1} / Y^{n-1}$$

$$\delta = y_t - y_i - \frac{l_t^2 - (x_i - x_t) \cdot X^{n-1}}{Y^{n-1}}$$

Les coefficients α et δ sont calculées d'après les valeurs de u_i^{n-1} et v_i^{n-1} à l'instant précédent (n-1). On rappelle l'équation II.128 :

$$\dot{v}_i = \frac{X}{Y} \dot{u}_i = \beta \dot{u}_i \quad \text{Equ. II. 134}$$

$$\text{avec } \beta = \alpha$$

L'équation II.134 est dérivée une fois de plus :

$$\ddot{v}_i = \frac{X}{Y} \ddot{u}_i + \frac{\dot{u}_i}{Y} \left[1 + \left(\frac{X}{Y} \right)^2 \right] \dot{u}_i = \gamma \ddot{u}_i + \varepsilon \dot{u}_i \quad \text{Equ. II. 135}$$

$$\text{avec } \gamma = \alpha$$

$$\varepsilon = \frac{\dot{u}_i^{n-1}}{Y^{n-1}} \left[1 + \left(\frac{X^{n-1}}{Y^{n-1}} \right)^2 \right]$$

La force généralisée associée à v_i doit aussi être exprimé comme une force associé à la variable u_i . Lorsqu'on applique une force g selon la direction y , celle-ci se décompose en une force radiale qui contraint la tige du tendeur et une force tangentielle responsable du mouvement circulaire du tendeur. Ayant considéré dans les hypothèses que le tendeur est infiniment rigide, nous ne nous préoccupons pas de la force radiale. Une force f selon la direction x (figure II.54) tel que :

$$f = g \tan \theta_i \quad \text{avec } \theta_i \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{Equ. II. 136}$$

a une projection sur la tangente de la trajectoire identique à la force g . D'après l'équation II.136, le tendeur ne peut pas être horizontal. Le problème se partage donc en deux demi-plan. Le tendeur doit rester dans le même demi-plan vertical, ce qui est généralement la situation observée sur les moteurs automobiles.

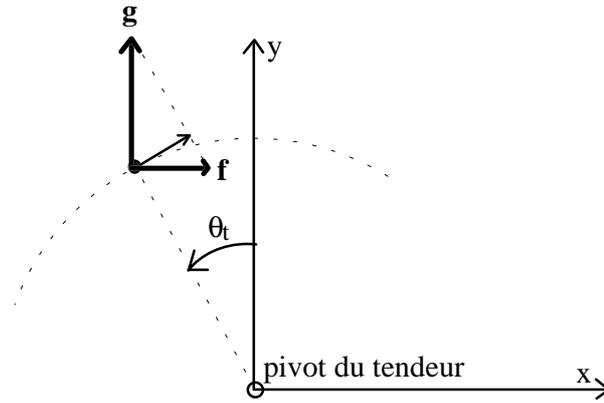


Figure II. 55 : Composantes des forces s'appliquant sur le galet tendeur.

Les équations II.133 à II.135 permettent ainsi d'exprimer le déplacement vertical du galet v_i et de ses dérivées en fonction du déplacement horizontal u_i et de ses dérivées. Les équations du mouvement se présentent alors comme l'équation II.137. x et y représente des variables quelconques. L'objectif est de supprimer la $k^{i\text{ème}}$ ligne et la $k^{i\text{ème}}$ colonne à l'aide des équations II.133 à II.135. Nous obtenons alors l'équation II.138.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} & m_{il} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} & m_{jl} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} & m_{kl} \\ m_{li} & m_{lj} & m_{lk} & m_{ll} \end{bmatrix}}_{\text{matrice d'inertie}} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{u}_i \\ \ddot{y} \end{array} \right\} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} & c_{ik} & c_{il} \\ c_{ji} & c_{jj} & c_{jk} & c_{jl} \\ c_{ki} & c_{kj} & c_{kk} & c_{kl} \\ c_{li} & c_{lj} & c_{lk} & c_{ll} \end{bmatrix}}_{\text{matrice d'amortissement}} \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{u}_i \\ \dot{y} \end{array} \right\} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{il} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} & k_{jl} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{kl} \\ k_{li} & k_{lj} & k_{lk} & k_{ll} \end{bmatrix}}_{\text{matrice de raideur}} \left\{ \begin{array}{c} x \\ u_i \\ y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_i \\ f_j \\ g \\ f_k \end{array} \right\} \tag{Equ. II. 137}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} m_{ii} & m_{ij} + \gamma m_{ik} & m_{il} \\ m_{ji} + & m_{jj} + \gamma m_{jk} + & m_{jl} + \\ m_{ki} \tan \theta_t & (m_{kj} + \gamma m_{kk}) \tan \theta_t & m_{kl} \tan \theta_t \\ \hline m_{li} & m_{lj} + \gamma m_{lk} & m_{ll} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{u}_i \\ \ddot{y} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{c|c|c} c_{ii} & c_{ij} + \beta c_{ik} + \epsilon m_{ik} & c_{il} \\ c_{ji} + & c_{jj} + \beta c_{jk} + \epsilon m_{jk} + & c_{jl} + \\ c_{ki} \tan \theta_t & (c_{kj} + \beta c_{kk} + \epsilon m_{kk}) \tan \theta_t & c_{kl} \tan \theta_t \\ \hline c_{li} & c_{lj} + \beta c_{lk} + \epsilon m_{lk} & c_{ll} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{u}_i \\ \dot{y} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{c|c|c} k_{ii} & k_{ij} + \alpha k_{ik} & k_{il} \\ k_{ji} + & k_{jj} + \alpha k_{jk} + & k_{jl} + \\ k_{ki} \tan \theta_t & (k_{kj} + \alpha k_{kk}) \tan \theta_t & k_{kl} \tan \theta_t \\ \hline k_{li} & k_{lj} + \alpha k_{lk} & k_{ll} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x \\ u_i \\ y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_i - k_{ik} \delta \\ f_j - k_{jk} \delta + (g - k_{kk} \delta) \tan \theta_t \\ f_k - k_{lk} \delta \end{array} \right\}$$

Equ. II. 138

II.3.6.9. Énergie cinétique du balourd

Le balourd est défini par une masse m_i située à une distance r_i du centre géométrique de la roue (figure II.57). Le balourd est repéré par l'angle θ_i et sa position angulaire initiale φ_i . Sa vitesse V dans le repère fixe est :



$$V = \begin{Bmatrix} \dot{u}_i - r_i \dot{\theta}_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \\ \dot{v}_i + r_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \end{Bmatrix}$$

D'où son énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m_i \left\{ \dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + r_i^2 \dot{\theta}_i^2 + 2r_i \left(-\sin(\theta_i + \varphi_i) \dot{u}_i + \cos(\theta_i + \varphi_i) \dot{v}_i \right) \dot{\theta}_i \right\} \quad \text{Equ. II. 139}$$

Les équations de Lagrange appliquées à l'équation II.139 donnent une action d'inertie et une force centrifuge :

$$F_\theta = \underbrace{m_i r_i^2 \ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{action d'inertie}} - \underbrace{m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \ddot{u}_i}_{\text{couplage inertiel}} + \underbrace{m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \ddot{v}_i}_{\text{couplage inertiel}} + \underbrace{m_i r_i^2 \ddot{\theta}_{i,s}}_{\text{excitation due à l'accélération de la rotation}} \quad \text{Equ. II. 140}$$

$$F_u = \underbrace{m_i \ddot{u}_i}_{\text{action d'inertie}} - \underbrace{m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{couplage inertiel}} - \underbrace{m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_{i,v}}_{\text{amortissement dû à la force centrifuge}} - \underbrace{\left(m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \ddot{\theta}_{i,s} + m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_{i,s} \right)}_{\text{terme d'excitation dû à l'accélération de la rotation}} \quad \text{Equ. II. 141}$$

$$F_v = \underbrace{m_i \ddot{v}_i}_{\text{action d'inertie}} + \underbrace{m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{couplage inertiel}} - \underbrace{m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_{i,v}}_{\text{amortissement dû à la force centrifuge}} - \underbrace{\left(m_i r_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \ddot{\theta}_{i,s} - m_i r_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_{i,s} \right)}_{\text{terme d'excitation dû à l'accélération de la rotation}} \quad \text{Equ. II. 142}$$

L'angle θ_i est pris à l'instant précédent.

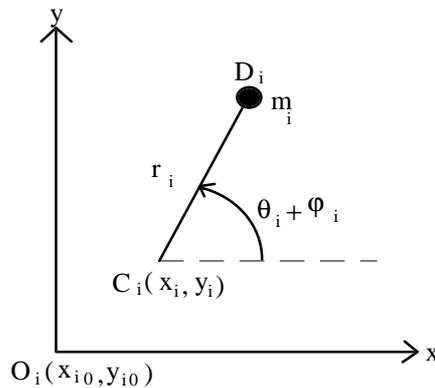


Figure II. 56 : Repérage du balourd.

II.3.6.10. Énergie cinétique d'un pas de brin enroulé sur une poulie

L'énergie cinétique d'un pas j de brin enroulé sur une poulie i est semblable à celle d'un balourd auquel on ajoute l'énergie de rotation :

$$E_c|_{\text{pas } j} = \frac{1}{2} m_p \left\{ \dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + R_i^2 \dot{\theta}_i^2 + 2R_i \left(-\sin(\theta_i + \varphi_j) \dot{u}_i + \cos(\theta_i + \varphi_j) \dot{v}_i \right) \dot{\theta}_i \right\} + \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}_i^2 \quad \text{Equ. II. 143}$$

avec J_p moment d'inertie d'un pas de courroie.

Nous obtenons les actions d'inertie :

$$F_{\theta} = \underbrace{(J_p + m_i R_i^2) \ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{action d'inertie}} - \underbrace{m_i R_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \ddot{u}_i}_{\text{couplage inertiel}} + \underbrace{m_i R_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \ddot{v}_i}_{\text{couplage inertiel}} + \underbrace{(J_p + m_i R_i^2) \ddot{\theta}_{i,s}}_{\text{excitation due à l'accélération de la rotation}} \quad \text{Equ. II. 144}$$

$$F_u = \underbrace{m_i \ddot{u}_i}_{\text{action d'inertie}} - \underbrace{m_i R_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{couplage inertiel}} - \underbrace{m_i R_i \sin(\theta_i + \varphi_i) \ddot{\theta}_{i,s}}_{\text{terme d'excitation dû à l'accélération de la rotation}} \quad \text{Equ. II. 145}$$

$$F_v = \underbrace{m_i \ddot{v}_i}_{\text{action d'inertie}} + \underbrace{m_i R_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \ddot{\theta}_{i,v}}_{\text{couplage inertiel}} - \underbrace{m_i R_i \cos(\theta_i + \varphi_i) \ddot{\theta}_{i,s}}_{\text{terme d'excitation dû à l'accélération de la rotation}} \quad \text{Equ. II. 146}$$

Nous ajoutons l'action de tous les pas enroulés pour obtenir l'action totale sur une poulie i.

La force centrifuge est retranchée des équations II.145 et II.146 car elle est déjà comptée dans la tension comme le montre le chapitre II.II.3.6.4.3.

II.3.6.11. Énergie cinétique d'un pas de courroie d'un brin libre

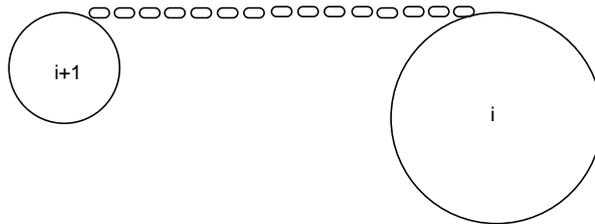


Figure II. 57 :Discrétisation en pas d'un brin libre.

Les vibrations longitudinales ne sont pas prises en compte dans le brin. En outre, les variations de vitesse du brin libre, dues aux variations de tension (chapitre II.II.2.2.3), à la variation de la vitesse angulaire et aux vitesses linéaires de translation des poulies adjacentes, sont négligeables. Par conséquent, l'énergie cinétique est calculée à partir de la vitesse moyenne du brin libre i :

$$E_c = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{R_i \dot{\theta}_i + R_{i+1} \dot{\theta}_{i+1}}{2} \right)^2$$

On obtient pour un pas de brin libre i :

$$F_{\theta} = m_i \frac{R_i^2}{4} \ddot{\theta}_{i,v} + m_i \frac{R_i R_{i+1}}{4} \ddot{\theta}_{i+1,v} + \underbrace{m_i \frac{R_i^2}{4} \ddot{\theta}_{i,s} + m_i \frac{R_i R_{i+1}}{4} \ddot{\theta}_{i+1,s}}_{\text{terme d'excitation au second membre}} \quad \text{Equ. II. 147}$$

$$F_{\theta+1} = m_i \frac{R_{i+1}^2}{4} \ddot{\theta}_{i+1,v} + m_i \frac{R_i R_{i+1}}{4} \ddot{\theta}_{i,v} + \underbrace{m_i \frac{R_{i+1}^2}{4} \ddot{\theta}_{i+1,s} + m_i \frac{R_i R_{i+1}}{4} \ddot{\theta}_{i,s}}_{\text{terme d'excitation au second membre}}$$

L'addition de tous les pas sur un brin donne la force inertielle totale pour un brin de courroie i.



II.3.6.12. Résolution des équations du mouvement

L'adjonction de toutes les actions développées dans les chapitre précédents aboutit à l'équation du mouvement de la forme :

$$\underbrace{[\mathbf{M}]}_{\text{matrice de masse}} \{\ddot{\xi}\} + \underbrace{[\lambda]}_{\text{matrice d'amortissement}} \{\dot{\xi}\} + \underbrace{[\mathbf{K}]}_{\text{matrice de raideur}} \{\xi\} = \{C\} \quad \text{Equ. II.148}$$

L'espace de configuration du système, composé de n poulies, de n paliers et de la courroie, possède $3n-1$ ou $3n-2$ (si présence d'un tendeur dynamique) degrés de liberté. Le vecteur ξ des variables du mouvement du système s'écrit :

$$\xi = \langle u_1 \quad v_1 \quad \theta_2 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad \dots \quad \theta_n \quad u_n \quad v_n \rangle^t$$

La résolution de l'équation du mouvement utilise le schéma d'intégration du 4^{ème} ordre de S. Gill (1951). La solution de l'équation du mouvement ramenée au premier ordre $\dot{y} = f(t, y)$ et discrétisée est :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \left[k_1 + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) k_2 + 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) k_3 + k_4 \right] \quad \text{Equ. II.149}$$

$$\text{avec} \begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) h k_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) h k_2\right) \\ k_4 = f\left(t_i + h, y_i - \frac{1}{\sqrt{2}} h k_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) h k_3\right) \end{cases}$$

Pour assurer la convergence de l'intégration, le pas de temps h doit inférieure au dixième de la plus petite période du système rencontrée au niveau des paliers. Le pas de temps h est généralement de l'ordre de 10^{-5} seconde. En revanche, le problème de stabilité s'est avéré plus délicat à résoudre et a focalisée toute les attentions.

Le premier problème rencontré provient de la non-linéarité générale de l'équation du mouvement. En effet, tous les termes de la matrice de raideur (et d'amortissement) varient dans le même temps en permanence et sont tributaires de l'erreur d'arrondi et de troncature. La stabilité absolue (une perturbation δ au point y_i n'entraîne pas une perturbation supérieure à δ au point y_m avec $m > i$) s'est avérée impossible à atteindre pour tous les schémas d'intégrations essayés (méthode de Gear généralisée, méthode de Newmark, méthodes de Runge-Kutta explicite non-linéaire et implicite, et la méthode de Runge-Gill retenue) avec des temps de calcul raisonnables. La solution adoptée est un lissage de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_i$ des poulies par une transformée de Fourier.

Le deuxième problème identifié provient aussi de la variation permanente de tous les membres de la matrice de raideur et d'amortissement. Cette variation se produit à la fréquence d'intégration $1/h$ de l'équation du mouvement (équation II.149). Il faut alors veiller à ce que la fréquence d'intégration ne soit pas un multiple des plus hautes fréquences du système. Sinon, nous obtenons une résonance paramétrique des paliers due à la variation d'origine numérique des termes de l'équation du mouvement (annexe I).

La programmation est assurée en langage Fortran 77. Le programme est appelé DYNAPOUL. Un exemple de temps de calcul est fournis sur la base d'une transmission simple appelée "cas d'école" (chapitre IV.3). Le temps de calcul CPU pour un couple $C = 4.\sin(12Nt)$ et $N=7000$ tr/mn, se monte à 1 minute et 40 secondes pour effectuer 4 tours de pignon moteur, ce qui est amplement suffisant pour assurer la convergence pour ce cas simple. Le temps de calcul est inversement proportionnel à la vitesse de rotation N du pignon moteur (donc plus de 10mn à 700 tr/mn pour l'exemple fourni). L'ordinateur utilisé est une station de travail IBM RISC System/6000 43P-140 (processeur POWERPC 604e cadencé à 233 MHz).

II.3.7. Sorties du Modèle

Au cours des calculs, le programme mémorise les données suivantes en fonction de la rotation de la poulie motrice :

Comportement des poulies

- L'angle de rotation θ_i et ses dérivés sont enregistrés pour chaque poulie. L'erreur de transmission dynamique $\theta_i - R_i\theta_1/R_1$ est ainsi déduite.
- Le déplacement horizontal u et vertical v de chaque poulie ainsi que ses dérivées est stockés. Si la transmission comporte un tendeur dynamique, l'angle de rotation du bras du tendeur est également stocké.

Comportement de la courroie

- La tension dynamique dans les brins libres est enregistrée ainsi que les variations de la tension globale (tension uniforme dans toute la courroie lorsqu'on n'applique pas de couple sur les poulies).
- La tension et la déformation des brins enroulés sur les poulies dentées est mémorisée. La charge et la déformations des dents de courroie en prise sur les poulies dentées sont aussi mémorisées.

II.4. Conclusion

Le comportement d'une transmission par courroie dentée n'est pas aisé à modéliser car il faut tenir compte de la souplesse de tous les éléments : l'âme et la denture de la courroie et les paliers. Le chapitre II.II.2 expose en outre les difficultés inhérentes aux imperfections de la courroie et des poulies, ainsi que les facteurs pouvant influencer le comportement de la transmission. Une fois le contexte de la modélisation défini, la modélisation du comportement dynamique d'une transmission par courroie dentée a été présentée. Celle-ci se base sur cinq modules reliant les aspects locaux (déformation de la denture) aux aspects globaux (erreur de transmission et tension dans les brins). Des aspects particuliers de la transmission ont été pris en compte indépendamment dans chaque module. La courbure des brins libres a été incorporée dans le calcul de la tension dans les brins (module 2), alors que les brins libres sont pris rectilignes pour le calcul des paramètres géométriques de la transmission (module 1). Le comportement non-linéaire de la courroie intervient dans les modules 3 et 4. La souplesse des paliers est prise en compte dans le module 5.

On dispose donc maintenant d'un logiciel de simulation de comportement dynamique d'une transmission par courroie dentée. Le troisième chapitre va maintenant présenter les mesures concernant la validation statique du logiciel.