Le vecteur d'état

$$Q=\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

Avec $\dot{x}$=Vcos(θ)

$\dot{y}$=Vsin(θ)

$\dot{\theta}$=w

$$\dot{q}=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

Suivi de trajectoire

$\dot{x}_{ref}=V_{ref}\cos(\theta_{ref})$

$\dot{y}_{ref}=V_{ref}\sin(\theta_{ref})$

$\dot{\theta}_{ref}=w_{ref}$

Le but est de minimiser l'erreur

$x-x_{ref} = y-y_{ref} = \theta - \theta_{ref} = 0$

$$e = \begin{pmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - xref \\ y - yref \\ \theta - \theta ref \end{pmatrix}$$

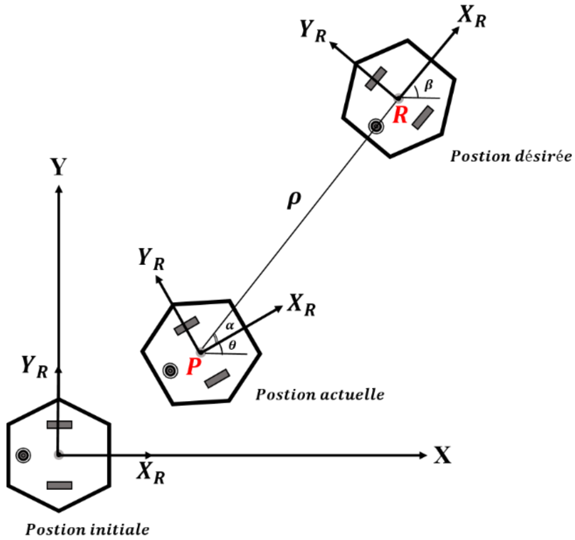
Avec $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \theta & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de rotation.

➔Le passage du repère global au repère du robot

Equations cinématiques :

La cinématique est l'étude fondamentale des comportements des systèmes mécaniques. Dans la robotique mobile, nous avons besoin de comprendre le comportement mécanique du robot afin de concevoir une méthode convenable de contrôle.

Considérons que le robot est à une position arbitraire P (x_c, y_c, θ) et il se trouve à une distance > 0 de la position désiré R (x_d, y_d, β) définie par rapport au repère globale (global inertial frame).



Le système de coordonnées du robot est régi par l'action combinée de deux vitesses linéaire et angulaire. La cartésien de robot est donnée par :

$$\dot{x} = v \cos \theta$$

$$\dot{y} = v \ \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = w$$

x, y et θ sont mesurés par rapport au repère globale (reference Inertial Frame)

La position du robot peut être de même représentée par les coordonnes polaires avec une erreur de distance $\rho > 0$:

$$\dot{\rho} = \ -v \ \cos(\beta - \theta) = \ -v \ \cos \alpha$$

$$\dot{\beta} = v \ \frac{\sin \alpha}{\rho}$$

$$\dot{\theta} = w$$

Où $\alpha = \ \beta - \theta$ est l'angle mesuré entre l'axe X_R du repère relative au robot et l'axe suivant ρ avec :

$$\rho = \sqrt{(x_d - x_c)^2 + (y_d - y_c)^2}$$

Les équations de la cinématique obtenues en se basant sur les coordonnées polaires sont :

$$\dot{\rho} = -v \ \cos \alpha$$

$$\dot{\alpha} = -w + v\,\frac{\sin\alpha}{\rho}$$

$$\dot{\beta} = v\,\frac{\sin\alpha}{\rho}$$

Cet ensemble d'équations n'est valide que pour $\rho \neq 0$.

Loi de contrôle et stabilité :

L'algorithme de commande doit être conçu pour déplacer le robot à partir de sa configuration actuelle (x_c, y_c, θ) à sa configuration désirée(x_d, y_d, β). Dans notre cas le but est de trouver le contrôle $u = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ de sorte que le robot atteint la position désirée dans un intervalle de temps fini.

La loi de contrôle proposée dépend de l'état (state-dependent) c.à.d. $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = f(\rho, \alpha, \beta)$ ce qui garanti que l'état tend vers $(0\ ,0\ ,\beta)$ sans atteindre $\rho = 0$ dans un intervalle de temps fini.

Une des méthodes les plus couramment utilisées pour étudier le comportement asymptotique est basé sur la théorie de stabilité de Lyapunov. Considérons une simple forme quadratique définie positive de la fonction de Lyapunov :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}\alpha^2$$

Où ρ et α sont respectivement les erreurs de distance et d'orientation présentés par le robot entre sa position actuelle et la position désirée par rapport au repère globale (Reference Inertial Frame).

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{\rho}\rho + \dot{\alpha}\alpha$$

En utilisant les équations cinématiques :

$$\dot{V} = \rho(-v\ \cos\alpha) + \alpha\left(-w + v\,\frac{\sin\alpha}{\rho}\right)$$

Le premier terme peut être non positif, en mettant la vitesse linéaire sous la forme:

$$v = K_\rho \rho \cos\alpha \qquad K_\rho > 0$$

$$\dot{V}_1 = \rho\left(-K_\rho \rho \cos^2\alpha\right)$$

$$\dot{V}_1 = -K_\rho \rho^2 \cos^2\alpha\ \leq 0$$

Cela veut dire que le terme $\dot{V}_1$ est toujours non croissant dans le temps et par conséquence, il converge asymptotiquement vers une limite finie non négatif.

De même, le deuxième terme peut être non positif en mettant la vitesse angulaire sous la forme :

$$w = K_\rho \sin\alpha\cos\alpha + K_\alpha\alpha \qquad K_\alpha > 0$$

$$\dot{V}_2 = \alpha\left(-K_\rho \sin\alpha\cos\alpha - K_\alpha\alpha - \frac{K_\rho\rho\sin\alpha\cos\alpha}{\rho}\right)$$

$$\dot{V}_2 = -K_\alpha\alpha^2 \leq 0$$

Finalement l'expression de la dérivée de temps de la fonction de Lyapunov V devient de la forme :

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = -K_\rho\rho^2\cos^2\alpha - K_\alpha\alpha^2 \leq 0$$

Le résultat est sous la forme semi-définie négative. En appliquant le lemme de Barbalat, il en résulte que $\dot{V}$ converge nécessairement vers zéro en temps croissant. Ce qui implique la convergence du vecteur d'état (ρ, α, β) vers$(0, 0, \beta)$.

Donc on peut conclure que les expressions des vitesses linéaire et angulaire suivantes rendent le mouvement du robot lisse et stable.

$$v = K_\rho\rho\cos\alpha$$

$$w = K_\rho \sin\alpha\cos\alpha + K_\alpha\alpha$$

Modèle dynamique

Le modèle dynamique est l'étude du mouvement d'un système mécanique en tenant compte des différentes forces qui affectent son mouvement contrairement à la cinématique où les forces ne sont pas prises en considération. Ce modèle est essentiel pour l'analyse de la simulation du mouvement du Turtlebot et pour la conception de divers contrôle de mouvement.

Equation dynamique :

$M (q)\ q + V (q,q)\ q + F (q) + G (q) + \tau_d = B (q)\ \tau - \Lambda T (q)^\lambda$

où:

M (q) une matrice d'inertie, V (q, q) est La matrice centripète et de coriolis, F (q) est la matrice de friction de surface, G (q) est le vecteur gravitationnel, τ_d est le vecteur d'inconnu borné de perturbations, y compris la dynamique non modélisée non structurée, B (q) est la matrice d'entrée, τ est le vecteur d'entrée, ΛT (q) est la matrice associée aux contraintes cinématiques, et λ est le vecteur multiplicateur de Lagrange

Approche dynamique de Lagrange

L’approche de Lagrange est une puissante méthode pour formuler les équations du mouvement dynamique du robot

Cette méthode, introduite par Lagrange, est utilisée pour dériver systématiquement les équations du mouvement en considérant les énergies cinétiques et potentielles du système donné.

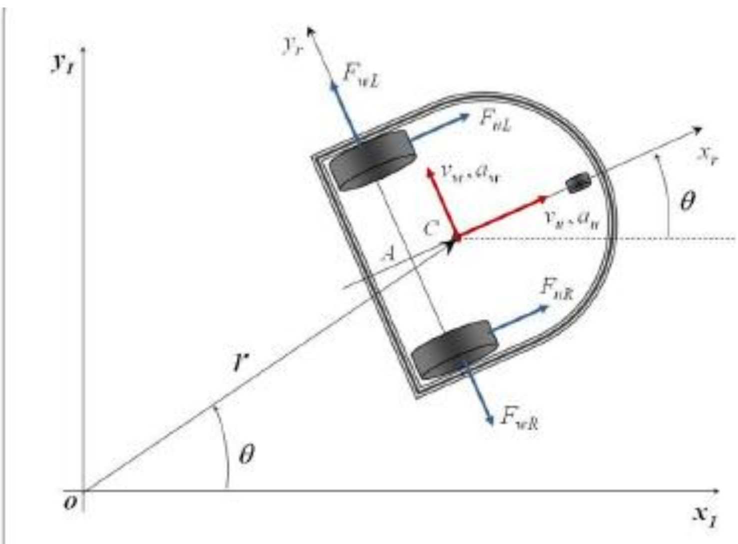
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial L}{\partial q} = F - \Lambda T\ (q)^{\lambda}$$

Où L = T-V est la fonction lagrangienne, T, est l'énergie cinétique de Le système, V est l'énergie potentielle du système, q sont les généralisées coordonnées, F est le vecteur de la force généralisée, Λ est les contraintes matrice, et λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé à contraintes

La première étape de la dérivation du modèle dynamique à l'aide du modèle de Lagrange Approche consiste à trouver les énergies cinétiques et potentielles qui motion du robot. En outre, comme le robot évolue en XI-YI, l'énergie potentielle du robot est considéré nulle.

.

.



. Figure 3: Robot free body diagram for Newtonian dynamic modeling.

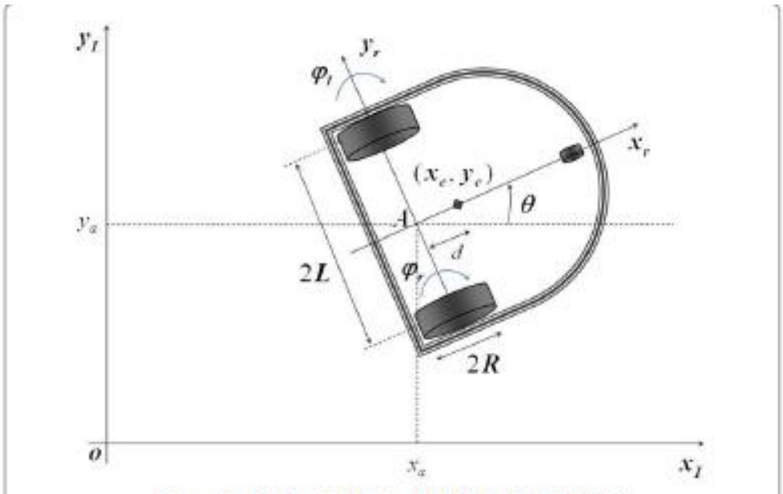


Figure 1: Differential Drive Mobile Robot (DDMR).

.

.

.

Tout calcul fait on obtient le résultat suivant

$$\begin{cases} \left(m + \frac{2.I_w}{R^2}\right)\dot{v} + m_c d.\omega^2 = \frac{1}{R}(\tau_r + \tau_l) \\ \left(I + \frac{2.L^2}{R^2}.I_w\right)\dot{\omega} + m_c d.\omega.v = \frac{L}{R}(\tau_r - \tau_l) \end{cases}$$

Avec

$(\tau_r; \tau_l)$ sont les couples des moteurs qui alimentent les roues

(v ; ω) sont respectivement les vitesses linéaires et angulaires

m_c : la masse du robot sans tenir en compte les masses des moteurs

m_w : masse d'un moteur

m : masse du robot ($m = m_c + 2.m_w$)

I : l'inertie du robot

I_w : inertie du moteur